INTRODUCTIE VAN HET INPRODUCT

Mark Timmer
Tom Coenen

Met de komst van de nieuwe examenprogramma's die het afgelopen schooljaar van start zijn gegaan in de vierde klassen van de havo en het vwo, is analytische meetkunde toegevoegd aan de curricula van wiskunde B. Op het vwo omvat dit nieuwe onderwerp naast algebraïsche methoden in de vlakke meetkunde ook vectormeetkunde. Hoewel de meeste concepten daaruit redelijk soepel en intuïtief geïntroduceerd kunnen worden, is er één concept waarbij dat minder het geval is: het inproduct. Mark Timmer en Tom Coenen vergelijken verschillende aanpakken voor de introductie van het inproduct.

Aanleiding

In een Lesson Study Team aan de Universiteit Twente is geruime tijd aandacht besteed aan de introductie van de vectormeetkunde in de vierde of vijfde klas van het vwo. De grootste meningsverschillen bleken zich daarbij voor te doen op het moment dat het inproduct om de hoek kwam kijken. Zoals u zich wellicht nog herinnert, zijn er twee gangbare definities voor het inproduct van twee vectoren

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$.

Algebraïsch wordt gesteld dat

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

en meetkundig wordt gesteld dat

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi)$

waarbij ϕ de (kleinste) hoek is van de twee vectoren en

$|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$ staan voor de lengtes van de vectoren.

Via de cosinusregel kan betrekkelijk eenvoudig worden bewezen dat deze definities equivalent zijn. In de les kan dus een willekeurige definitie als uitgangspunt worden gebruikt, waarna de andere hieruit kan worden bewezen.

Tot zover geen vuiltje aan de lucht, zo lijkt het. Echter, welke van deze twee definities kies je om mee te beginnen in de les? Welke van de twee is een logisch uitgangspunt, een zinnige definitie waarbij leerlingen begrijpen wat het concept is dat wordt gedefinieerd? Voor de algebraïsche definitie lijkt dit zeer zeker niet het geval. Uiteraard kunnen leerlingen prima het kunstje nadoen als dat moet, maar wat stelt het getal precies voor dat verkregen wordt door de kentallen te vermenigvuldigen en vervolgens op te tellen? De meetkundige definitie lijkt al niet veel inzichtelijker: het lijkt om de (cosinus van de) hoek tussen twee vectoren te gaan, maar vervolgens wordt er nog mysterieus vermenigvuldigd met de lengtes van de vectoren. Wat zegt het op die wijze verkregen getal?

Bestaande aanpakken

Er zijn verscheidene manieren te verzinnen om het inproduct te introduceren. Een mogelijkheid is om simpelweg te stellen dat we de vermenigvuldiging van vectoren willen definiëren, omdat we nou eenmaal veel van die operatie houden. Als we uitgaan van een tweedimensionaal assenstelsel en ontbinden in componenten, vinden we

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (\overrightarrow{a_x} + \overrightarrow{a_y}) \cdot (\overrightarrow{b_x} + \overrightarrow{b_y}) = \overrightarrow{a_x} \cdot \overrightarrow{b_x} + \overrightarrow{a_x} \cdot \overrightarrow{b_y} + \overrightarrow{a_y} \cdot \overrightarrow{b_x} + \overrightarrow{a_y} \cdot \overrightarrow{b_y}$$

met $\overrightarrow{a_x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{a_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix}$ en $\vec{b}$ evenzo ontbonden.

Door af te spreken dat de vermenigvuldiging van twee vectoren in dezelfde richting verkregen wordt door hun lengtes te vermenigvuldigen, en bovendien af te spreken dat de vermenigvuldiging van twee vectoren die loodrecht op elkaar staan 0 is, volgt hieruit de gangbare definitie

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Deze aanpak hangt echter aan elkaar van niet-beargumenteerde aannames en afspraken: waarom kies je er immers voor dat loodrechte vectoren vermenigvuldigd 0 opleveren en waarom is de distributieve wet (die we klakkeloos hebben toegepast) überhaupt van toepassing?

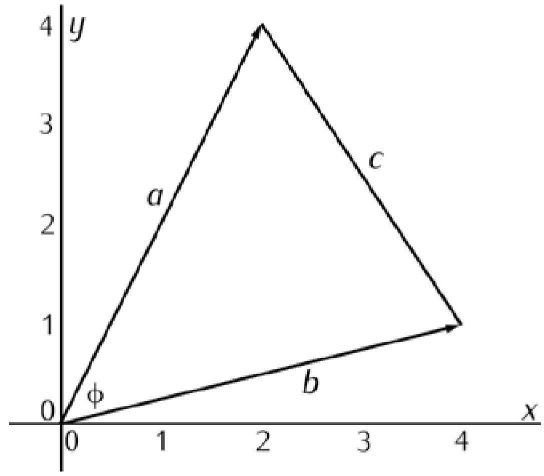
Een andere aanpak die in meerdere variaties voorkomt, is om te beweren dat je iets wilt kunnen zeggen over de mate waarin twee vectoren 'overeenkomstig' zijn. Uitgaande van twee vectoren van gelijke lengte is dat nog wel zinvol te definiëren: als ze precies dezelfde kant op wijzen dan zijn ze volledig overeenkomstig (bijvoorbeeld uitgedrukt in het getal 1), als ze precies in tegenovergestelde richting wijzen dan zijn ze op zich overeenkomstig afgezien van de spiegeling (bijvoorbeeld uitgedrukt in het getal -1) en als ze loodrecht op elkaar staan, dan lijken ze helemaal niet op elkaar (uitgedrukt in het getal 0). Vectoren die bijna dezelfde kant op wijzen zouden dan een overeenkomstigheid net onder 1 moeten hebben, terwijl vectoren die bijna loodrecht staan een overeenkomstigheid net verschillend van 0 moeten hebben. Op

basis van deze overwegingen ligt het voor de hand om de overeenkomstigheid van vectoren te definiëren als de cosinus van hun hoek – dat levert immers exact alle bovengenoemde eigenschappen op. Deze aanpak leidt echter niet tot de definitie van het inproduct, aangezien hij niet verklaart waarom het inproduct van vectoren met lengtes ongelijk aan naast de cosinus ook nog de lengtes van de vectoren bevat. Worden vectoren 'meer overeenkomstig' als ze langer worden? Deze uitleg loopt dus uiteindelijk ook vast.
Weer andere aanpakken gaan uit van de loodrechte projectie van de ene vector op de ander (uitgaande van vectoren die vanuit hetzelfde punt beginnen), maar moeten dan vreemde kunstjes uithalen om bij het inproduct uit te komen, omdat zo'n projectie slechts afhangt van de lengte van één van de vectoren – de loodrechte projectie van $\vec{a}$ op $\vec{b}$ is immers onafhankelijk van de lengte van $\vec{b}$. *Moderne Wiskunde* kiest in de vierde klas voor een dergelijke aanpak in een natuurkundige context, waarbij vermeld wordt dat de vector $\vec{a}$ een kracht voorstelt en de vector $\vec{b}$ een weg. Vervolgens wordt gesteld dat de *arbeid* om een wagentje over de volledige lengte van weg $\vec{b}$ te verplaatsen gelijk is aan het product van die lengte en de lengte van de component van $\vec{a}$ in de richting van de weg (de loodrechte projectie van $\vec{a}$ op $\vec{b}$). Hoewel de zo verkregen uitdrukking voor arbeid inderdaad leidt tot de definitie van het inproduct, betwijfelen we of dit leerlingen nu echt leidt tot nuttig inzicht: waarom zouden we nou net $\vec{a}$ als kracht en $\vec{b}$ als weg willen definiëren en vervolgens het natuurkundige concept arbeid erbij pakken als we het product van twee vectoren definiëren? En wat moeten we ons erbij voorstellen als de kracht zich onder de weg bevindt, kan dat ook? Gekscherend: in dezelfde lijn hadden we net zo goed kunnen stellen dat de vector $\vec{a}$ de uitkomsten van een kansexperiment bevat en de vector $\vec{b}$ de bijbehorende kansen. Het inproduct is dan gedefinieerd als de verwachtingswaarde van dit kansexperiment (uitgaande van de wat onrealistische aanname dat de componenten van $\vec{b}$ niet negatief zijn en optellen tot 1). In dit voorbeeld, evenals in het geval van de natuurkundige arbeid, worden specifieke betekenissen toegekend aan de vectoren die naar ons idee op de langere termijn problemen kunnen veroorzaken. Het begrip wordt dusdanig gekoppeld aan een context, dat leerlingen in verwarring kunnen raken over de betekenis van het inproduct in een setting waarin die context afwezig is (bijvoorbeeld bij het bepalen van de hoek tussen twee vectoren).

Tot nu toe hebben we een aantal mogelijke opties voor de introductie van het inproduct de revue laten passeren, waarbij we telkens tot de conclusie kwamen dat er iets anders nodig zou kunnen zijn. Is de hierboven telkens gekozen volgorde wel de juiste: waarom überhaupt *beginnen* met het inproduct te definiëren? Uiteindelijk is het zeer zeker nuttig om bekend te zijn met dit concept, aangezien het leerlingen bijvoorbeeld helpt de hoek tussen twee vectoren te bepalen. Daarnaast helpt het om snel loodrechte vectoren op te kunnen stellen, als eenmaal bekend is dat dit het geval is als het inproduct 0 is. Echter, het feit dat het inproduct nuttig is wil nog niet zeggen dat het verstandig is om te beginnen met ons in allerlei bochten te wringen om het concept te introduceren.
In dit geval lijkt een didactisch logische route te zijn om te beginnen met een probleem dat we willen oplossen: een toepassing van het inproduct. Op basis van die overweging hebben wij een aanpak ontwikkeld voor het introduceren van het inproduct, zoals hierna beschreven. Na het beschikbaar komen van de boeken voor de vijfde klas van Noordhoff bleek dat *Getal & Ruimte* ook voor deze aanpak heeft gekozen.

Hoek tussen twee vectoren als uitgangspunt

Als introductie van het inproduct starten we met het formuleren van een probleemsituatie: het bepalen van de hoek tussen twee vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$. We beschrijven nu hoe dat er klassikaal, in samenspraak met de leerlingen, uit zou kunnen zien. We gaan er daarbij van uit dat de leerlingen de cosinusregel al beheersen – afhankelijk van de methode zou er daarvoor wellicht wat met hoofdstukken geschoven moeten worden.



figuur 1

In figuur 1 zijn de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ getekend in een assenstelsel (voor het gemak beide beginnend in de oorsprong), waarbij we de vectoren als zijden van een driehoek beschouwen en de letters a en b gebruiken voor de lengten van deze zijden – dus, $a = \left|\vec{a}\right|$ en $b = \left|\vec{b}\right|$. De lengte van de derde zijde noemen we c.

Op basis van deze informatie gaan we de hoek ϕ bepalen. De cosinusregel vertelt ons dat
$a^2 + b^2 - 2ab\cos(\phi) = c^2$,

oftewel $\cos(\phi) = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$.

Het vervelende van deze uitdrukking om de hoek te bepalen is, dat de teller de lengte *c* bevat, die niet direct gegeven is. We kunnen deze lengte echter wel eenvoudig bepalen via de afstandsformule, waarbij de kentallen van de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ weer om de hoek komen kijken:

$$c = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

Als we dit invullen in de teller van de eerdergenoemde breuk dan wordt het er niet eenvoudiger op, dus om verder te kunnen vereenvoudigen, bepalen we bovendien de lengtes *a* en *b* met behulp van de afstandsformule en de kentallen:

$$\cos(\phi) = \frac{\left((a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2\right) - \left((a_1)^2 + (a_2)^2\right) - \left((b_1)^2 + (b_2)^2\right)}{-2ab}$$

Voor het gemak hebben we hier de wortels en kwadraten alvast tegen elkaar weggestreept. Uitwerken van de haakjes en samennemen van overeenkomstige termen levert al snel:

$$\cos(\phi) = \frac{-2a_1b_1 - 2a_2b_2}{-2ab} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{ab}$$

Aangezien we *a* en *b* geïntroduceerd hadden als de lengtes van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, kunnen we deze weer substitueren zodat de hele vergelijking is uitgedrukt in de vectoren. Dat leidt tot de volgende stelling:

$$\cos(\phi) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Wat hebben we nu bereikt?

Op basis van een probleem (het willen bepalen van de hoek tussen twee vectoren) hebben we nu een mooie stelling verkregen, waarmee dit probleem kan worden opgelost. Maar niet alleen dat: we kunnen nu ook naar het inproduct toe. Immers, nadat leerlingen even hebben geoefend met het bepalen van een aantal hoeken op basis van de zojuist bewezen stelling, kan de stap gemaakt worden naar loodrechtheid. Leerlingen weten dat twee lijnen (en dus ook twee vectoren) loodrecht zijn als ze een hoek van 90° maken, en dus dan en slechts dan als de cosinus van de hoek 0 is. Het is uiteraard zinvol om op dit moment in de les even stil te staan bij de vraag waarom dat het geval is – het komt doordat we geen hoeken groter dan 180° beschouwen in deze context.
Wanneer zijn twee vectoren dus loodrecht? Als

$\frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = 0$, oftewel als $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Ook hier is het mooi om de leerlingen even na te laten denken over potentiële problemen met een noemer die 0 wordt. Uiteraard kan dit alleen voorkomen als minimaal één van de vectoren gelijk is aan de nulvector – dat geval kunnen we echter negeren, aangezien er dan geen sprake meer is van een hoek. Aangezien de uitdrukking $a_1b_1 + a_2b_2$ zo handig is (hij kan immers gebruikt worden om te bepalen of twee vectoren loodrecht op elkaar staan), geven we hem een naam: *inproduct*. Dit is een goed moment om ook direct de notatie te introduceren: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$. En wat blijkt: we hebben nu direct de meetkundige definitie cadeau. Uit de eerder afgeleide stelling

$\cos(\phi) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ volgt immers direct dat

$a_1b_1 + a_2b_2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\phi)$, en dat de rechterkant van de vergelijking dus net zo goed als inproduct beschouwd kan worden.

Relatie tot eerdere theorie

Het bepalen van de hoek tussen twee lijnen zou al eerder in het curriculum voorgekomen kunnen zijn – zowel bij *Getal & Ruimte* als bij *Moderne Wiskunde* is dat het geval. Als we de vectoren $\vec{a}$ en $\vec{b}$ in figuur 1 even beschouwen als onderdelen van twee lijnen, dan kan worden gesteld dat de hoek die zo'n lijn maakt met de positieve *x*-as gelijk is aan de inverse tangens van zijn richtingscoëfficiënt (waarbij negatieve hoeken gevonden worden voor dalende lijnen). Door deze hoeken van elkaar af te halen, en het resultaat indien nodig nog van 180° af te halen, vinden we de hoek tussen de twee lijnen. In het geval van vectoren kan deze aanpak in principe ook nog steeds worden gebruikt, hoewel we dan op moeten passen met vectoren die in de negatieve *x*-richting wijzen; in dat geval vinden we hoeken die zich eigenlijk 'aan de andere kant van de *y*-as bevinden'. Alsnog komen we er wel uit, maar je moet goed oppassen met minnetjes en hebt altijd nog te maken met de extra stap om te bepalen of het gevonden antwoord van 180° afgehaald moet worden of niet. Die bijkomstige moeilijkheid is niet aan de orde als we werken met de vergelijking van beide definities van het inproduct.
Ook hebben leerlingen waarschijnlijk al eerder kennisgemaakt met de stelling dat twee lijnen loodrecht op elkaar staan als het product van hun richtingscoëfficiënten gelijk is aan -1. In het geval van vectoren zou je dat kunnen

uitdrukken in $\frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{b_2}{b_1} = -1$, wat eenvoudig herleid kan

worden tot $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$. Wat dat betreft beschikten leerlingen dus al over een techniek om te controleren of twee vectoren loodrecht op elkaar staan, voordat we het inproduct introduceerden. Dat maakt het nut van het inproduct in twee dimensies wellicht iets minder nadrukkelijk, maar neemt niet weg dat hoeken er soms wat eenvoudiger mee uitgerekend kunnen worden. Ook is het zeker niet verkeerd als leerlingen eens zien dat je binnen de wiskunde soms met een andere kijk tot dezelfde resultaten kunt komen; dat bevordert het begrip. Wanneer bovendien de stap gemaakt wordt naar de derde dimensie, dan blijkt dat het bepalen van loodrechtheid van vectoren nog steeds soepel gaat met het inproduct, terwijl de eerdere theorie niet meer van toepassing is.

Ervaringen in de klas

We hebben bovenstaande aanpak uitgeprobeerd in een klas vwo 4, terwijl collega's uit het Lesson Study Team de traditionele volgorde hebben geprobeerd waarbij het inproduct eerst geïntroduceerd werd (via een variatie op de eerdergenoemde bestaande aanpakken). Hoewel leerlingen bij hen de gang van zaken op zich prima konden volgen, deden zich wel vragen voor zoals 'wat betekent het nu eigenlijk als het inproduct bijvoorbeeld 3 is'? Bij onze les deed dat probleem zich niet voor – het was direct duidelijk wat het nut was van het inproduct; het is gewoon een waarde voor het kunnen bepalen van de hoek tussen twee vectoren. Het gevoel betekenis te willen geven aan de waarde van het inproduct deed zich niet voor vanwege de didactische opzet, net als dat leerlingen zich ook niet geneigd voelen zich wat voor te stellen bij de uitdrukking $a^2 + b^2$ als ze kennismaken met de stelling van Pythagoras – het is een hulpmiddel in een groter geheel.

Waar leerlingen wel wat moeite mee bleken te hebben was de overgang van vectoren naar lengtes, en het gerelateerde onderscheid tussen $\vec{a}$, a en $|\vec{a}|$. Het is van groot belang om heel duidelijk te maken dat we in eerste instantie te maken hebben met vectoren, maar vervolgens voor het gemak overgaan op zijden van een driehoek. Pas op het allerlaatst wordt dit weer terugvertaald naar vectoren, door a en b weer te schrijven als $|\vec{a}|$ en $|\vec{b}|$.

Het tweede punt van aandacht is de vraag waarom we slechts een gedeelte van de breuk gaan herschrijven als we bij $\cos(\phi) = \dfrac{c^2 - a^2 - b^2}{-2ab}$ zijn aangekomen. Het bleek nuttig en nodig om leerlingen expliciet te vertellen dat we met reden alleen de teller herschrijven, aangezien daar die lengte c staat waar we vanaf willen. Omdat we die uitdrukken in de kentallen van $\vec{a}$ en $\vec{b}$, en dat ook mogelijk is voor a en b, is het zinvol om alle drie de lengtes uit de teller te herschrijven om zo tot een kortere uitdrukking te komen (omdat veel tegen elkaar wegvalt). Voor de noemer is dat niet het geval: dat zou een veel lastiger leesbare uitdrukking worden met twee wortels erin.

Als laatste kwam een leerling nog met het punt dat de gevraagde hoek ook gewoon bepaald kan worden door de hoeken die beide vectoren maken met de x-as, gegeven door $\tan^{-1}\left(\dfrac{a_2}{a_1}\right)$ en $\tan^{-1}\left(\dfrac{b_2}{b_1}\right)$, van elkaar af te trekken. Zoals hierboven al werd genoemd, is dat inderdaad ook een valide aanpak die best even op het bord mag verschijnen ter vergelijking.

Conclusie

We hebben geconcludeerd dat verschillende bestaande aanpakken voor het introduceren van het inproduct niet aan onze wensen voldoen. In plaats van het wat kunstmatig inzichtelijk proberen te definiëren van dit nieuwe concept, beginnen we liever met het oplossen van een voor de hand liggend probleem: het bepalen van de hoek tussen twee vectoren. We waren verheugd te zien dat *Getal & Ruimte* onze didactische visie deelt. Door het bepalen van de hoek tussen twee vectoren komen we tot een stelling, waarin beide gangbare definities van het inproduct voor het oprapen liggen. Door leerlingen ervan te overtuigen dat het vaak zinvol is om te weten wanneer twee vectoren loodrecht op elkaar staan, voelt het vervolgens heel natuurlijk om ook inderdaad dit inproduct te definiëren. De equivalentie van de meetkundige en algebraïsche definities zijn dan bovendien direct evident. Ervaringen in de klas wekten de indruk dat leerlingen van vwo 4 goed uit de voeten kunnen met de besproken aanpak.

Wellicht heeft u ook interessante ervaringen opgedaan bij het introduceren van het inproduct, al dan niet met een andere aanpak? We zijn benieuwd naar uw reactie!

Over de auteurs

Mark Timmer is docent wiskunde aan het Carmel College Salland te Raalte. Tom Coenen is docent wiskunde aan CSG Reggesteyn te Nijverdal. Beiden werken zij bovendien als vakdidacticus aan de Universiteit Twente.
E-mailadressen: *m.timmer@utwente.nl* en *t.j.m.coenen@utwente.nl*