LOGARITMEN SCHATTEN VIA HERHAALD DELEN

Tom Coenen
Mark Timmer

Logaritme – een betekenisvolle aanpak met herhaald delen. Zo luidde de kop van het artikel in *Euclides* 91-3 van Pauline Vos en Børge Espedal. Tom Coenen en Mark Timmer vinden het een mooie manier om een begin te maken met logaritmen, maar ze signaleren hier ook een nadeel.

In *Euclides* 91-3 bespraken Pauline Vos en Børge Espedal een interessante manier om met logaritmen te werken: *herhaald delen totdat je bij 1 uitkomt*. Deze methode wordt ook gebruikt om logaritmen te schatten die niet precies op een geheel getal uitkomen. Zo wordt geredeneerd dat log(800) zich tussen 2 en 3 bevindt, aangezien je in twee stappen bij $800 : 10^2 = 8 > 1$ eindigt en in drie stappen bij $800 : 10^3 = 0{,}8 < 1$. Een prima techniek. Daarna wordt geredeneerd dat log(800) dichter bij 3 ligt dan bij 2, met als argument dat 1 dichter bij 0,8 ligt dan bij 8. Deze redenering gaat echter niet op – als bedoeld wordt dat er naar de verschillen tussen de getallen gekeken moet worden (0,2 en 7). Beschouw bijvoorbeeld eens log(200), dat ook tussen 2 en 3 ligt aangezien $200 : 10^2 = 2$ en $200 : 10^3 = 0{,}2$. Nu ligt 1 dichter bij 0,2 dan bij 2, dus volgens de argumentatie van Vos en Espedal zou dat betekenen dat log(200) dichter bij 3 dan bij 2 ligt. Dat is echter niet het geval, aangezien $\log(200) \approx 2{,}3$.
Een correcte wijze om te bepalen of een logaritme dichter bij het ene of het andere gehele getal ligt gaat via de kennis dat $x^{0,5} = \sqrt{x}$. Zo komt bijvoorbeeld $10^{2,5}$ overeen met $100 \cdot \sqrt{10}$, en is $\log(100 \cdot \sqrt{10})$ precies 2,5. Daar volgt direct uit dat $\log(a \cdot 100)$, met $1 < a < 10$, dichter bij 2 ligt als $a < \sqrt{10}$ en dichter bij 3 als $a > \sqrt{10}$.
We passen deze gedachte nu toe in de aanpak van *herhaald delen totdat je bij 1 uitkomt*, waarbij we op dezelfde manier beginnen: $200 : 10 = 20$; $20 : 10 = 2$; $2 : 10 = 0{,}2$. Het getal 2 vergelijken we nu met $\sqrt{10}$. (Bij een ander grondtal gaat het uiteraard analoog via de wortel van dat grondtal.) Aangezien de wortel niet mooi uitkomt, kwadrateren we aan beide kanten en vergelijken we 4 met 10. Uit het feit dat $4 < 10$ (en dus $2 < \sqrt{10}$) volgt dat log(200) dichter bij 2 ligt dan bij 3. In het geval van log(800) vergelijken we 8 met $\sqrt{10}$ en vinden we $64 > 10$ (en dus $8 > \sqrt{10}$), dus ligt log(800) dichter bij 3 dan bij 2.
Op basis van deze inzichten kan uiteindelijk alsnog gebruik gemaakt worden van een zekere vorm van afstand van de tussenantwoorden 2 en 0,2 tot 1, in het geval van het bepalen van log(200), door niet te kijken naar hun verschil met 1 maar naar het getal waardoor gedeeld moet worden om van 2 bij 1 te komen en het getal om van 1 vervolgens bij 0,2 te komen. Aangezien er vanuit 2 door 2 gedeeld moet worden om op 1 uit te komen, en vervolgens door 5 gedeeld moet worden om op 0,2 uit te komen, ligt log(200) dichter bij 2 dan bij 3. De correctheid van deze methode volgt direct uit het feit dat er bij beide stappen door $\sqrt{10}$ gedeeld zou worden als de logaritme precies halverwege zou zitten (uitgaande van grondtal 10). Over het algemeen lijkt de eerdergenoemde techniek met het kwadrateren eenvoudiger te zijn, aangezien er dan geen delingen uitgevoerd hoeven te worden. Overigens is het uiteindelijk maar de vraag in welke mate het überhaupt nuttig is om het geschatte interval te verkleinen van $(a;\ a + 1)$ naar $(a;\ a + 0{,}5)$ of $(a + 0{,}5;\ a + 1)$...
Vos en Espedal vermelden vervolgens dat er ook prima overgestapt kan worden naar grondtallen anders dan 10. Inderdaad is het herhaald delen dan in principe alsnog een valide en inzichtelijke techniek, hoewel het al snel lastig wordt als het niet meer een logaritme van de vorm ${}^{a}\log(b \cdot a^n)$ betreft (met a, b en n positief en geheel, en $1 \leq b < a$). Probeer bijvoorbeeld maar eens ${}^{3}\log(94)$ te bepalen door 94 herhaaldelijk door 3 te delen – dan moet je al met breuken aan de slag, waarbij je in feite toch weer ouderwets aan het kijken bent welke machten van 3 (die in de noemer terechtkomen) het getal 94 insluiten.
Inderdaad, in het artikel van Vos en Espedal wordt ook bij ${}^{2}\log(100)$ al weer teruggegrepen op herhaald vermenigvuldigen. Ook wordt daar vermeld dat er beredeneerd kan worden dat ${}^{2}\log(100)$ dichter bij 7 ligt dan bij 6, uitgaande van $2^6 = 64$ en $2^7 = 128$. Ons vermoeden is dat hier geredeneerd wordt dat 100 dichter bij 128 ligt dan bij 64, aangezien er geen alternatieve verklaring gegeven wordt. Ook die redenering gaat echter niet op. Vergelijk bijvoorbeeld ${}^{2}\log(92)$: hoewel 92 dichter bij 64 ligt dan bij 128, geldt toch ${}^{2}\log(92) \approx 6{,}52$ – dichter bij 7 dan bij 6 dus. Hoewel de door Vos en Espedal beschreven methode niet voor alle situaties inzichten zal geven en de methode van schatten door slechts te kijken naar de afstand tot 1 in het algemeen onjuist blijkt te zijn, is het herhaald delen op zichzelf alsnog een mooie manier om via slim gekozen voorbeelden een begin te maken met logaritmen.

Over de auteurs

Tom Coenen is docent wiskunde aan CSG Reggesteyn te Nijverdal. Mark Timmer is docent wiskunde aan het Carmel College Salland te Raalte. Beiden werken zij bovendien als vakdidacticus aan de Universiteit Twente. E-mailadressen: *t.j.m.coenen@utwente.nl* en *m.timmer@utwente.nl*