

Op dinsdagmiddag 11 april 2006 organiseerde de werkgroep VWO-UT een studiemiddag voor wiskundedocenten vwo. Het thema van de studiemiddag was 'leervormen'. De keuze van het thema was ingegeven door de wens van het onderwijsveld voor een bijstelling van de didactiek van het wiskundeonderwijs. **Nellie Verhoef** belichtte dat thema met het accent op de rol van de docent.

Meer drama in het wiskundeonderwijs

Maak er maar een drama van!

Waarom vinden sommigen wiskunde leuk? Wiskunde hoeft je namelijk niet leuk te maken, het is leuk vanuit zichzelf. De aantrekkelijkheid ligt misschien wel in de Aha-erlebnis, het gevoel dat je iets hebt ontdekt, dat je iets snapt. Het creëren van een omgeving waarin leerlingen iets kunnen ontdekken, ligt voor een groot deel in handen van de docent. Dat kan op heel wat verschillende manieren, onder andere door te benadrukken wat je niet bedoelt. Daarom begin ik met een verhaal.

Als lerarenopleider kom ik geregeld lessen bijwonen met het oog op de leersituatie van docenten in opleiding (DiO's). Zo bezocht ik ongeveer een maand geleden de HAVO-VWO-afdeling van een doodgewone school. Zoals zoveel scholen in de buurt had ook deze school 'het nieuwe leren' hoog in het vaandel. De directie van die school had besloten dat het onderwijsconcept in rap tempo aan vernieuwing toe was: de leerling centraal. Dit onderwijsconcept werd vervolgens vertaald in veel zelfwerkzaamheid. Het gebouw was zelfs aangepast, in die zin dat de lokalen gegroepeerd lagen om een grote open ruimte in het midden – een studieruimte voor iedereen.

Een kwartier voor aanvang van de les ontmoette ik de DiO in de lerarenkamer en ik vroeg hem naar een ingevuld lesformulier. Normaal zou ik dat allang in mijn bezit hebben. De DiO echter gaf aan dat het helemaal niet nodig was om zo'n formulier in te leveren, want er stond toch niets op. Ik vroeg waarom er dan niets op stond? Het antwoord luidde: 'Ik vraag alleen of er nog vragen zijn'. Met die boodschap in het hoofd zat ik even later samen met de schoolpracticumdocent (de begeleider van de DiO) achterin de klas. De klas, 4HA, bestond uit 31 leerlingen. Het onderwerp was steekproeven. Het was de laatste les voor het proefwerk.

Zoals aangekondigd vraagt de DiO of er nog vragen zijn. Niemand reageert. De DiO antwoordt daarop: 'Prima, dan gaat deze rij (wijst naar rechts) naar de open ruimte hiernaast en de rest (wijst naar links) blijft hier'. Dit gebeurt. Daarna gebeurt er niets, behalve dat de leerlingen een rekenmachine op tafel leggen waarmee ze verder niets doen. Na verloop van vijf minuten staat ik ongeduldig de

schoolpracticumdocent aan: 'Vind je dit niet een beetje duur?' Maar nee, de schoolpracticumdocent ziet geen probleem, hij komt net terug uit Marokko. Ik constateer dat hij er gezond, uitgerust en licht gebruikt uitziet. Toch pak ik de Euclides-special uit mijn tas en bied dit aan: 'Ken je dat? Nee? Moet je eens lezen, je mag dit exemplaar houden.' Er volgt niet het inhoudelijke gesprek waarop ik stiekem had gehoopt. Tien minuten later vervolg ik wanhopig: 'Vind je dit effectief?' 'Ach, ze zijn lekker bezig', is zijn antwoord. Inmiddels zitten de leerlingen met elkaar te kletsen over alles behalve over wiskunde. Ik vraag of hij deze les nabespreekt met de DiO. 'Nee, ik heb de leerlingen gezegd dat zij zelf maar moeten aangeven wanneer en waar het niet goed gaat. Dat is veel directer.' Ik plòf van woede – dit vind ik nu een drama! Wellicht is deze situatie niet eens zo extreem, en komt dit veel meer voor dan we denken.

Hoe dan ook, de vraag die hier aan de orde is, gaat over het omgekeerde: hoe zijn leerlingen intellectueel uit te dagen? Wat kunnen we van leerpsychologie leren als het om wiskundeonderwijs gaat? Wat betekent dat vervolgens voor het handelen van de docent?

Hoe verlopen leerprocessen?

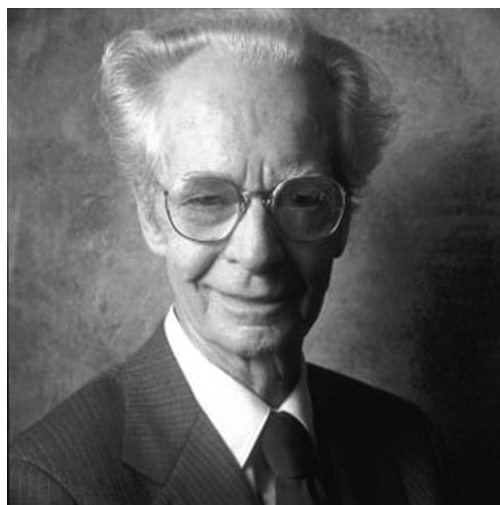


fig. 1 Burrhus Skinner (1904 - 1990)


In de epistemologie (kennisleer) zijn twee hoofdstromingen te onderscheiden, het behaviorisme en het constructivisme als reactie daarop. De behavioristische benadering gaat uit van de mens die bij wijze van spreken een machine is, onderworpen aan wetmatigheden (Skinner, figuur 1). Het behaviorisme staat bekend om de experimenten met dieren, waarin het leren is gebaseerd op conditioneren. Leren is vanuit die grondgedachte niets anders dan conditionering door beloning en straf. De ouden onder ons kennen nog wel het stempeltje als beloning. Kenmerkend is het overdrachtsonderwijs waarbij het accent op de leerinhoud ligt, en niet op de leerling die de leerstof krijgt aangeboden.

De tegenhanger van de behavioristische benadering is de constructivistische benadering waarbij de nadruk dan juist wel op de leerling ligt die de aangeboden leerstof zelf integreert, het zelfontdekkend leren. Het leren wordt binnen het constructivisme getypeerd als een actief proces, waarin leerlingen zelf kennis construeren. De behavioristische benadering leidde veelal tot fragmentarische kennis, daarom waren de verwachtingen wat betreft de constructivistische benadering hoog gespannen. De veronderstelling was namelijk dat de ontdekking zelf de beloning van de denkactiviteit zou zijn (Bruner, figuur 2).



fig. 2 Jerome Bruner (1915)

In de praktijk vielen de resultaten tegen, de leerlingen bleken de gewenste theorieën niet altijd te ontdekken. Bovendien waren de leerlingen minder gemotiveerd dan verwacht (Ausubel, figuur 3).



David P. Ausubel

If I had to reduce all educational psychology to just one principle, I would say this: The most important single factor influencing learning is what the learner already knows. Ascertain this and teach him accordingly.

Vonwotzu
Educational Psychology: A Cognitive View. New York, 1968

fig. 3 David Ausubel (1918)

Binnen de constructivistische benadering worden nog eens twee stromingen onderscheiden: het individueel constructivisme en het sociaal constructivisme. De indi-

vidueel constructivistische benadering berust op het werk van Piaget (figuur 4), die geïnteresseerd was in de wijze waarop individuen de fysische wereld leren begrijpen.



fig. 4 Jean Piaget (1896 - 1980)

Hij ontdekte dat kinderen gedurende hun ontwikkeling niet alleen kennis verwerven door het manipuleren en bewerken van objecten, maar dat ook de argumenten die ze daarbij gebruiken, veranderen. De sociaal constructivistische benadering stoelt op de ideeën van Vygotsky (1960, figuur 5), die de gedachte introduceerde dat kennisontwikkeling kan worden gestimuleerd door activiteiten die nog net niet zelfstandig uitgevoerd kunnen worden maar wel met behulp van de docent. Hij noemde dat de uitbreiding van de 'zone van naaste ontwikkeling'.



fig. 5 Lev Vygotsky (1896 - 1934)

Kort samengevat en vrij vertaald gaan deze algemene theorieën over domweg oefenen en stampen (behaviorisme), het leren in het licht van individuele kennisopbouw (individueel constructivisme), en het leren als een sociaal proces (sociaal constructivisme).

Hoe verlopen leerprocessen als het om wiskunde gaat?

In de ontwikkeling van het wiskundeonderwijs zijn de sporen van zowel de behavioristische als de constructivistische benadering terug te vinden. De behavioristische benadering met de nadruk op oefenen en stampen heeft tegenwoordig plaatsgemaakt voor een constructivistische

benadering met het accent op kennisconstructie. Daarmee zijn de vaardigheden van het cijferen en het hoofdrekenen op de achtergrond geraakt en vervangen door het actief, in de leerstof geïntegreerd gebruik van hulpmiddelen zoals de formulekaart, de (grafische) rekenmachine en de computer. Parate kennis is langzaam maar zeker weggezaakt, het zoeken van informatie kwam daarvoor in de plaats. Voor de schoolboeken betekende dat een verschuiving van kale opgaven naar allerlei realistische (betekenisvolle, maar ook betekenisloze) problemen in contexten, al dan niet gebaseerd op de werkelijkheid om ons heen. Het individueel leren op school (in rijen achter elkaar) werd stukje bij beetje vervangen door groepsleren (in tweetallen naast elkaar, in viertallen tegenover elkaar of in nog grotere groepen). De docent kreeg de rol van coach in plaats van kennisoverdrager en spil van onderwijsleerprocessen van leerlingen. Door de recente aansluitingsproblemen stijgt de verwarring. De vraag dringt zich zelfs op of met het badwater het kind niet is weggegooid.

Natuurlijk is oefenen noodzakelijk, natuurlijk is het van belang individueel kennis te construeren en natuurlijk is een sociaal proces van invloed op het leren, ook bij het leren van wiskunde, maar in welke setting en in welke mate/verhouding?

Hoe ziet een intellectueel uitdagende wiskundeonderwijsleeromgeving er dan uit?

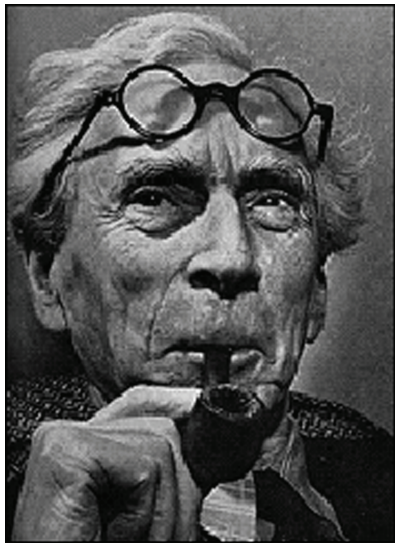


fig. 6 Bertrand Russell (1872 - 1970)

Bij een onderwijsleeromgeving voor wiskunde staat het leren van wiskunde centraal. Maar wat is wiskunde dan? Volgens Van Dalen (2006) is wiskunde 'de wetenschap van getal en ruimte'. Wat betekent dat dan? In de ogen van Bertrand Russell (figuur 6) komt alle wiskunde voort uit de logica. Hilbert (figuur 7) vond zelfs dat alle wiskundige beweringen binnen een axiomastelsel als formules geschreven zouden moeten worden. Voor elke denkbare formule zou dan in principe kunnen worden nagegaan of deze volgt uit axioma's.



fig. 7 David Hilbert (1862 - 1943)

Uiteindelijk is dit idee opgeblazen door de onvolledigheidsstelling van Gödel (figuur 8).

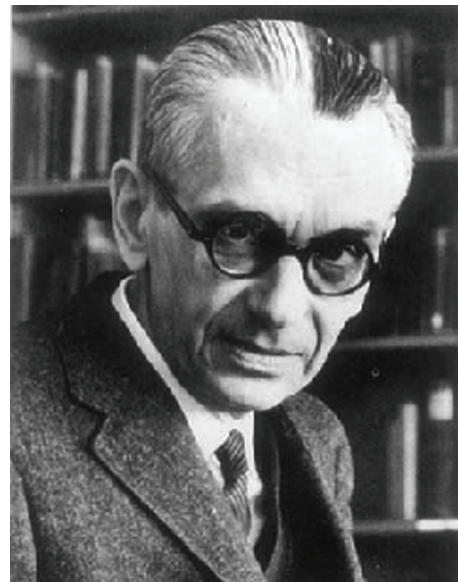


fig. 8 Kurt Gödel (1906 - 1978)

L.E.J. Brouwer (figuur 9) echter zag de wiskunde als een vrije schepping, onafhankelijk van de ervaring, slechts gebonden aan in eigen wezen wortelende wetten. In de ogen van Brouwer was wiskunde onafhankelijk van taal en logica. Later komt hierin, aangestuurd door Freudenthal, verandering. Volgens Freudenthal (1978) was 'Mathematics [...] not merely a language but a mental activity, and mathematical concepts are not words but realities' (*Weeding and sowing*, p. 7). Op de vraag wat wiskunde, de wetenschap van getal en ruimte, is, zijn dus nogal wat verschillende antwoorden gegeven.

Het ultieme doel van de wiskunde is echter abstractie. Abstractie, het 'veralgemeineren en comprimeren', is

wezenlijk voor wiskunde en voor het onderwijzen daarvan (Ehrenfest-Afanassjewa, 1960). Het zoeken naar verbanden is in dat proces van veralgemeniseren en comprimeren essentieel (Tall, 2004). De opdoemende vraag luidt vervolgens ‘Hoe leer je dat, abstraheren?’ Over deze vraag hebben zich heel wat wiskundig-didactische onderzoekers gebogen.



fig. 9 Luitzen Brouwer (1881 - 1966)

Volgens Freudenthal (1978) voltrekt het abstractieproces zich op tweeërlei wijze. Enerzijds is er sprake van een geleidelijk ontwikkelingsproces uitgaande van een rijke schakering aan contexten, anderzijds zijn er ook situaties denkbaar waarbij de abstracties als vertrekpunt worden gekozen waarna aan de hand van paradigmatische (exemplarische) voorbeelden het abstractieproces op gang komt. Freudenthal duidde dit verschil aan met de begrippen *comprehension* (*samenvoegen*) en *apprehension* (*oppakken*). Het *samenvoegen* van meerdere contexten met gemeenschappelijke kenmerken maakt het geleidelijk aan mogelijk deze kenmerken zelf als objecten van beschouwing onder ogen te nemen. Bijvoorbeeld bij het leren begrijpen van de beginselen van projectieve meetkunde lopen door *samenvoeging* voorbeelden van spoorlijnen, buisconstructies en stadslandschappen, waarnaar in verschillende situaties op verschillende manieren wordt gekeken, uit op éénzelfde concept: ‘evenwijdigheid’.

Als je een hoger abstractieniveau wilt bereiken, is het in dit geval toereikend om met slechts één enkel voor leerlingen betekenisvol voorbeeld te volstaan, zoals bij het kijken naar geïdealiseerde denkbeeldige spoorlijnen door een geïdealiseerde ruit. Wat het abstractieproces betreft, voegt een grotere variatie aan contexten er op dat moment niets meer aan toe. Dit voorbeeld is voldoende concreet en daarnaast abstract genoeg om er alle belangrijke kenmerken en eigenschappen van het concept evenwijdigheid aan op te hangen. Het is voor de leerling voldoende om de kenmerken en eigenschappen van dat ene voorbeeld als zodanig *op te pakken*. De beperking tot één paradigmatisch voorbeeld schept op deze wijze juist de nodige ruimte waarbinnen de leerling zijn aandacht op de eigenschappen kan richten. Het oppakken van één paradigmatisch voorbeeld betekent dat overeenkomsten en

verschillen met dat ene voorbeeld in verband worden gebracht. Met de begrippen *samenvoegen* en *oppakken* als voorbeeld wordt eerst ingegaan op het abstractieproces bij het begrip ‘lineair verband’, daarna komt het onderwerp ‘het oplossen van kwadratische vergelijkingen’ aan de orde.

Het abstractieproces bij lineaire verbanden

Wat zou de winst (met het oog op abstractie) van *oppakken* kunnen zijn als het over lineaire verbanden gaat? Lineaire verbanden zijn eigenlijk bijzonder. Als je bijvoorbeeld een tuin zou willen omspitten en je doet 1 m^2 per uur, dan spit je 2 m^2 in twee uur, en 3 m^2 in drie uur om. In de praktijk echter gaat dat niet zo, dan spit je veel minder om in twee uur – immers, je krijgt dorst en je wordt moe. Er is dus geen sprake van een lineair verband. Meestal verlopen verbanden niet lineair; denk maar aan het verloop van temperatuur, snelheid, enzovoort. Toch zijn er genoeg lineaire verbanden te vinden.

Zo komen lineaire verbanden voor in situaties waar het bijvoorbeeld gaat om vraag en aanbod, zoals bij toegangsprijzen: een zwemabonnement van € 15,- per jaar en daar bovenop per bezoek een toegangsprijs van € 3,- extra, bij twee bezoeken € 6,- extra, enzovoort. Bij elk bezoek meer komt er eenzelfde bedrag bij, een lineair verband. Dit voorbeeld is echter beperkt omdat het om een discreet proces gaat, bovendien spelen negatieve waarden geen rol. De hoeveelheid water (alweer niet negatief) die in een zwembad loopt, kent deze beperking niet. Met het oog op de lineaire processen voegt het *samenvoegen* nauwelijks iets toe aan het *oppakken* van één van deze voorbeelden.

Uitgaande van één paradigmatisch voorbeeld, zoals het volgende ‘In een cilindervormige ton staat het water 80 cm hoog. Het vat stroomt via een kraan met een constante snelheid in 10 minuten vol. Per seconde neemt de hoogte van het water in de ton toe’, zijn er voldoende gegevens om verder te komen (te abstraheren). Het gaat hier om een continu lineair verband tussen de tijd t en de hoogte h van het water in de ton. Het voorbeeld kan worden uitgebreid met andere (grotere of kleinere) tonnen, andere beginstanden, of combinaties van aan- en afvoer. Nog steeds gaat het hier overigens om niet-negatieve verbanden. Het verband tussen t en h kan numeriek (tabel), grafisch (lijn) of analytisch (functievoorschrift) worden gerepresenteerd. Deze representaties samen vormen de gecomprimeerde cognitieve eenheid ‘lineair verband’ waarbinnen soepel kan worden gependeld tussen de verschillende representaties. Abstractieverhoging vindt vervolgens plaats door verbanden aan te brengen met andere cognitieve eenheden. In dit geval zou dat een verband kunnen betekenen met het begrip ‘differentiequotient’: constante verschillen in de tabel bij gelijkblijvende stapgrootte, de richtingscoëfficiënt van een lijn, of de coëffi-

ciënt m voor x bij de uitdrukking $f(x) = mx + n$. Het begrip differentiequotiënt (steilheid) geeft inzicht in evenwijdigheid, in horizontale en in verticale stand, waardoor de oorspronkelijke cognitieve eenheid 'lineair verband' krachtiger wordt. In dit paradigmatische voorbeeld gaat het dan om verschillende tonnen waar het water met dezelfde snelheid inloopt (evenwijdige lijnen), een ton waar het water steeds in blijft staan (horizontale lijn), en een ton die in één klap leegloopt (verticale lijn). Eén paradigmatisch voorbeeld (*oppakken*) verdient hier de voorkeur boven het *samenvoegen* van een serie gelijksoortige situaties.

Een volgend voorbeeld gaat over het begrip 'kwadratische vergelijkingen'.

Het abstractieproces bij het oplossen van kwadratische vergelijkingen

Zou bij het leren oplossen van kwadratische vergelijkingen de winst (met het oog op abstractie) van het *oppakken* van één paradigmatisch voorbeeld ook de voorkeur verdienen?

De volgende typen zijn bij kwadratische vergelijkingen te onderscheiden:

- (i) $x^2 = 49$ (kwadraat is gelijk aan kwadraat)
- (ii) $x^2 = 11x$ (gemeenschappelijke x in beide termen), en
- (iii) $x^2 = 3x + 10$ (som-product), tot 'gemakkelijk te vinden' oplossingen.

Zo is de oplossing $x = 7$ in type (i), $x = 0$ in type (ii), en $x = 5$ in type (iii) niet moeilijk te vinden. In algemene zin ziet de op nul herleide vorm er uit als

$$x^2 + (p + q)x + p \cdot q = (x + p)(x + q) = 0$$

Het *samenvoegen* van deze typen zou kunnen doen vermoeden dat alle kwadratische vergelijkingen gemakkelijk in een van deze vormen te schrijven en op te lossen zijn. Helaas is dat in de meeste gevallen juist niet zo, zoals bij $x^2 = 10x - 12$. Type (ii) biedt geen uitkomst omdat $x = 0$ geen oplossing is, hetzelfde geldt voor type (iii) omdat er niet direct een oplossing zichtbaar is. Dus blijft type (i) over, $x^2 = 10x - 12$ herschrijven tot $(x-5)^2 = 13$ (kwadraat afsplitsen). De algemene vergelijking $ax^2 + bx + c = 0$ wordt op deze wijze herleid tot de abc-formule,

$$\left(\frac{x + \frac{1}{2}b}{a} \right)^2 = \frac{(b^2 - 4ac)}{4a^2}.$$

In de praktijk ontardt het *samenvoegen* nogal eens tot het 'voor de zekerheid altijd toepassen van de abc-formule'. Het *oppakken* van het grondtype (i): $x^2 = q^2$ leidt door generalisatie tot $(x + p)^2 = q^2$ (kwadraat afsplitsen).

Deze algemene vorm is te schrijven als:

$x^2 = -2px + (-p^2 + q^2)$. Hiermee zijn alle typen beschreven, ook $ax^2 + bx + c = 0$ ofwel $x^2 = \frac{-b}{ax} - \frac{c}{a}$. Dit gaat veel sneller.

De vraag is nu of het *oppakken* van dit grondtype positief bijdraagt aan het abstractieproces. De cognitieve eenheid 'kwadratische vergelijking' kan verbonden worden met de cognitieve eenheid 'tweedegraads functie'. Manipulaties en bewerkingen door te transformeren (verschuiven, draaien, spiegelen en vermenigvuldigen) versterken de cognitieve eenheid. Zo is $f(x) = (x + p)^2 - q^2$ een verschuiving (p naar links en q naar boven) van $g(x) = x^2$ en $h(x) = ax^2 + bx + c$ is in eerste instantie een vermenigvuldiging van a met $g(x)$ als startpunt. Compressie leidt vervolgens tot een nieuwe, krachtige cognitieve eenheid. Het oplossen van een kwadratische vergelijking is dan gelijkwaardig met het vinden van snijpunten van een parabool met de x -as. Voor het oplossen van de vergelijking $x^2 = 10x - 12$ gaat het om het snijpunt met de x -as van $f(x) = x^2 - 10x + 12 = (x - 5)^2 - 13$, een verschuiving van $g(x) = x^2$ met 5 naar rechts en 13 naar beneden. Het verband met het functiebegrip biedt een strategie (verschuiven) om nulpunten te vinden via de top. Het relatief eenvoudig afleiden en gebruik van kwadraat afsplitsen (*oppakken*) geniet de voorkeur boven het relatief lastig afleiden en gebruik van de abc-formule.

In bovenstaande voorbeelden wordt *apprehension* (*oppakken*) als effectiever (met het oog op abstractie) aangemerkt dan *comprehension* (*samenvoegen*). Dit is uiteraard niet altijd het geval. Beide aanpakken onderscheiden zich van elkaar. *Oppakken* biedt inzicht in de eigenschappen van een begrip en de samenhang daartussen, omdat het zich concentreert op één rijk paradigmatisch voorbeeld. *Samenvoegen* is gebaseerd op de toepasbaarheid van een begrip (hoewel de aangeboden toepassingen nogal eens gekunsteld dan wel theoretisch incorrect zijn). Door die verschillende toepassingen met elkaar te vergelijken (ermee te spelen) ontstaat inzicht in de eigenschappen van het begrip en de onderlinge samenhang daarvan.

De voorbeelden laten zien dat abstractie niet vanzelf ontstaat. Bij het *oppakken* zal de docent leerlingen kunnen stimuleren om het verband te leggen met het ene paradigmatische voorbeeld en bij het *samenvoegen* zal de docent kunnen sturen bij het vinden van gemeenschappelijke kenmerken en eigenschappen. De docent ondersteunt op deze wijze de processen van kennisconstructie. Dat betekent hier een pleidooi voor een hoofdrol van de docent (de titel van dit stukje: maak er maar een drama van). Deze gedachte is niet nieuw. De filosoof Socrates (470-399 voor Chr.) paste bij het onderwijzen de inductieve methode van redeneren toe. Hij werkte vanuit een verzameling van details naar het geheel toe, ofwel door toetsing van vele individuele inzichten trachtte hij tot een algemeen geldende waarheid te komen. Concreet betekent dit dat alle gedachten, zowel goede als foute, over een onderwerp worden gebruikt. Onder leiding van de docent passeren de gedachten de revue, alsof het voor het eerst is dat via deze redenering tot een bepaalde conclusie wordt gekomen. De leerling geeft aan dat hij de redenering kan volgen door tel-

kens aan te geven of het wel of niet begrepen wordt. In feite gaat het om een *dialog* tussen de docent en zijn leerlingen waarbij de autoriteit van de docent centraal blijft staan. Samengevat zijn in de huidige wiskundemethodes genoeg voorbeelden te vinden van *samenvoegen*, veel minder wordt gebruik gemaakt van het *oppakken* van paradigmatische voorbeelden met het oog op abstractie.

Nellie Verhoef,
Universiteit Twente

Met dank aan ir. Steffen Posthuma, s.posthuma@carmel-collegesalland.nl, wiskundedocent aan het Carmel College Salland te Raalte; hij doet in het kader van NWO onderzoek naar de toepassing van het begrip *apprehension* in het wiskundeonderwijs.

Literatuur

- Ehrenfest-Afanassjewa, T. & Freudenthal, H. (1960). Kan het wiskunde-onderwijs bijdragen tot de vorming van het denkvermogen? Purmerend: Muusses, 1951. De bijdrage van Ehrenfest-Afanassjewa is opgenomen in: *Didactische opstellen wiskunde*. Zutphen: Thieme, 1960.
- Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing. Preface to a Science of Mathematical Education*. Dordrecht: Reidel.
- Dalen, D. van (2006). Q.E.D. *Euclides* 81(4), 217-219.
- Tall, D.O. (2004). Thinking through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Bergen, Noorwegen.