COMBINATORIEK: MEER DAN TRUCJES

Mark Timmer en Nellie Verhoef

Mark Timmer en Nellie Verhoef blikken terug op een Lesson Study waarin geëxperimenteerd werd met het introduceren van telproblemen. In plaats van één voor één de combinatorische concepten uit het boek aan te leren, werden de leerlingen in het diepe gegooid, met verrassende resultaten en observaties.

In een aantal eerdere artikelen in *Euclides* hebben we het uit Japan afkomstige concept *Lesson Study* reeds uit de doeken gedaan. Kort gezegd komt dit neer op het met een Lesson Study Team (LST) voorbereiden van een lessenserie - bijvoorbeeld over een lastig onderwerp - gevolgd door een cyclisch proces van lesgeven, live-observeren, evalueren en bijstellen van die lessenserie. De nadruk ligt altijd op het leerproces van de leerlingen, niet op het functioneren van de docent.

Bij de introductie van de combinatoriek op zowel havo als vwo komen de schoolboeken al snel op de proppen met faculteiten*,* permutaties en combinaties, liefst in de vorm van hapklare formules. In ons geval begint het boek met een uitleg over faculteiten, waar de leerlingen dan een aantal opgaven over moeten maken. Vervolgens komen de permutaties aan de orde en daarna de combinaties. Leerlingen zijn handig genoeg om te bedenken dat iedere opgave in de paragraaf *Permutaties* een permutatie betreft, en dus met de *nPr*-functie van zijn of haar rekenmachine opgelost kan worden. Zo achter elkaar lukt het allemaal dus nog wel. Velen van u zullen echter de moeilijkheid herkennen die leerlingen ervaren als de sommen op het eind van het verhaal ineens door elkaar gehusseld worden. De meeste leerlingen zijn dan het overzicht volledig kwijt en hebben geen idee meer welke techniek ze nu bij welke opgave moeten gaan toepassen.

Het was aan het begin van dit schooljaar daarom al snel duidelijk waar onze Lesson Study het eerste halfjaar over zou gaan: het meer inzichtelijk introduceren van dit soort telproblemen. Het liefst wilden we leerlingen hierbij zelf de verschillen tussen de concepten laten ontdekken, zodat ze vervolgens beter voorbereid zijn op gemengde opgaven waarbij niet direct duidelijk is welke techniek van toepassing is.

Voorbereiding

Nadat het onderwerp was vastgelegd, zijn we begonnen met het bestuderen van een aantal wetenschappelijke artikelen over combinatoriekonderwijs. We vonden hierin onder andere de observatie dat leerlingen vaak niet precies door hebben hoe een situatie nu eigenlijk in elkaar steekt: kunnen objecten in een vraagstuk bijvoorbeeld meerdere keren gekozen worden ('met terugleggen'), of tellen ze hoogstens eenmaal mee ('zonder terugleggen')? Het lijkt essentieel dat leerlingen zich inleven in de situatie waarin geteld wordt; wie kiest wat, en hoe gaat dat in z'n werk?

Op grond van onderzoek van Batanero, Navarro-Pelayo, en Godino[1] besloten we om leerlingen in de eerste les in het diepe te gooien, zonder eerst allerlei theorie uit te leggen. De leerlingen zouden in groepjes van vier worden verdeeld, ieder met de opdracht om uit een stapel van dertien verschillende telproblemen er drie op te lossen. Daarna zouden de leerlingen de telproblemen moeten groeperen: alle telprobleem van hetzelfde type moeten op dezelfde stapel komen (waarbij de leerlingen zelf de typen verzinnen). Bijvoorbeeld: het aantal manieren om vijf boeken op een boekenplank te ordenen is van precies dezelfde aard als het aantal manieren om drie personen op te delen in voorzitter, penningmeester en secretaris. Hoewel leerlingen nog niet weten dat dit allebei met een faculteit uitgerekend kan worden, hadden we wel de hoop dat ze zouden inzien dat er conceptueel gezien geen verschil is tussen de twee situaties. De dertien opgaven betroffen situaties die met machten, faculteiten, permutaties en combinaties beschreven konden worden.

De tweede les zou vooral worden besteed aan het bespreken van de oplossingen van de leerlingen. Ze lichten hun indeling toe en de rest van de klas stelt vragen. Vervolgens zouden ze een vergelijkbare opdracht krijgen: in plaats van het vinden van een categorie voor een opgave, moeten ter afsluiting nieuwe vraagstukken bedacht worden per categorie (die op gelijke wijze opgelost kunnen worden).

Uitvoering en observaties

We waren met name nieuwsgierig naar de wijze waarop leerlingen aan de slag gaan met een stel telproblemen waar ze nog geen uitleg over hebben gekregen. Zouden ze gestructureerd gaan uitschrijven of op zoek gaan naar slimme berekenmethodes? Proberen ze zich te overtuigen van de correctheid van hun oplossingen? Welke verschillen tussen de typen problemen kunnen ze uit zichzelf identificeren?

Een van de deelnemers van het LST voerde de les uit, terwijl de rest tussen de leerlingen zat en observeerde. Tijdens de les bleek het voor de leerlingen maar wat lastig om überhaupt met de opgaven aan de slag te gaan. Velen waren nog niet wiskundig vaardig genoeg om zelf een oplosstrategie te bedenken. Ook het gestructureerd uitschrijven van alle mogelijkheden ging lang niet altijd van een leien dakje.

Op basis van deze observaties is direct besloten om het programma voor de tweede les om te gooien. In plaats van de opzet die we in eerste instantie in gedachten hadden, begon de docent die tweede les zelf. Hij legde de klas een aantal keer een tweetal opgaven voor, waarvan in de eerste les was gebleken dat sommige groepjes ze als gelijk en andere groepjes ze als verschillend beschouwden. De leerlingen werd gevraagd hun keuzes te motiveren. Hierbij werd onder andere door iemand opgemerkt dat het aantal mogelijke manieren om iets te doen afhangt van of je een object meer dan eenmaal mag kiezen (een concept dat door de leerling tot 'terugstopping' werd gedoopt): mooi!

Op een gegeven moment kwam er een interessant tweetal opgaven aan de orde (zie kader). De eerste vroeg naar het aantal manieren om drie mensen te kiezen uit een groep van vijf mensen (een combinatie), de tweede naar het aantal manieren om drie auto's te parkeren gegeven vijf parkeerplaatsen (een permutatie). Zo op het oog lijkt het wel op elkaar: 3 kiezen uit 5. Toen er nog geen overtuigende argumenten naar voren kwamen betreffende de overeenkomstigheid dan wel het onderscheid tussen de twee problemen, liet de docent de leerlingen de situatie fysiek naspelen. Hij koos willekeurig drie leerlingen uit en zette ze voor de klas. Dit was één manier om de leerlingen te selecteren (de combinatie). Vervolgens stelden deze leerlingen de drie auto's voor. De docent 'parkeerde' de leerlingen op een bepaalde manier voor het bord, waarbij de positionering de keuze voor de parkeerplaats representeerde (de permutatie). Hij vroeg de klas of ze zo mooi geparkeerd stonden. Op het antwoord "nee!" reageerde hij door de leerlingen in een andere volgorde te parkeren op dezelfde parkeerplaatsen. Ondanks dat de gekozen parkeerplaatsen niet gewijzigd werden, was er zo toch op een andere manier geparkeerd. Vervolgens greep de docent terug op het kiezen van de leerlingen en stelde hij de vraag of de positiewisseling de groep leerlingen had gewijzigd. De klas zag in dat dit niet het geval was, en zo viel het kwartje dat het parkeren van de auto's blijkbaar op meer manieren kan dan het uitkiezen van de leerlingen: bij het parkeren was de *volgorde* van belang, bij het kiezen van de groep niet.

Verbetering

Na afloop van de twee lessen concludeerden we aan de ene kant dat het uit het niets systematisch noteren en indelen nog te lastig is voor de leerlingen. Aan de andere kant hebben we ook geleerd dat het uitbeelden van de situaties een positief effect heeft. Op basis hiervan is de les bijgesteld, waarbij de nadruk meer kwam te liggen op het inleven in de situatie waarin telproblemen zich voordoen. Een andere collega heeft deze verbeterde lessen vervolgens uitgevoerd, waarbij wederom werd geobserveerd door de rest van het LST. Tijdens deze lessen bleek dat leerlingen het best moeilijk vinden om zonder sturing van de docent een situatie uit te beelden; vaak storten ze zich nog steeds te snel op het gebruik van formules die ze zich herinneren, zonder eerst eens goed na te denken over waar het nu precies om gaat.

Conclusie

We sloten deze Lesson Study af met de conclusie dat leerlingen echt een beeld moeten krijgen van de situatie waarin de telproblematiek zich afspeelt, voordat er teruggegrepen wordt op formules met 'eenvoudige' faculteiten, permutaties en combinaties. Visualisatie is belangrijk, maar zeker in het begin is enige sturing van de docent toch echt wel nodig. Zo heeft de Lesson Study iedere deelnemer weer behoorlijk aan het denken gezet, en zullen onze toekomstige lessen over combinatoriek meer gericht zijn op in- en uitbeelden dan op het aanleren van de standaardtrucjes!

Over de auteurs

Noten

[1] Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32*, 181–199.
[2] Dit artikel is afgeleid van een blog van Mark Timmer op *www.delerarenagenda.nl/blog*

Kader (vertaald uit [1])

1. Vijf leerlingen (Angela, Bernadette, Claudia, Dirk en Ezra) hebben zich opgegeven om een docent Frans te helpen met het klaarzetten van glazen en dergelijke voor een wijnproeverij (in een bovenbouwklas ter gelegenheid van de 87e verjaardag van de school). Hij heeft er maar drie nodig. Op hoeveel manieren kan hij drie leerlingen kiezen uit deze vijf? Hij kan bijvoorbeeld Bernadette, Claudia en Dirk kiezen.
2. De parkeergarage onder het appartement van Klaas heeft vijf genummerde plaatsen: 1 2 3 4 5. Omdat het gebouw nog heel nieuw is, zijn niet alle appartementen verhuurd. Alleen Klaas, Leonard en Maurice wonen er op dit moment en kunnen daar hun eigen auto parkeren. Bijvoorbeeld kan Klaas zijn auto op plaats nummer 1 zetten, Leonard op nummer 2 en Maurice op nummer 4. Op hoeveel verschillende manieren kunnen Klaas, Leonard en Maurice hun auto parkeren?