EUCLIDES

vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 87

nr 4

februari 2012

Videoconferencing

Delen van veeltermen deel 2

Lesson Study deel 2

Europa ontdekken

Vaknetwerken

Oproep

Orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Lesson Study
DEEL 2

[Nellie Verhoef]

Nellie Verhoef gaf in het vorige nummer van *Euclides* (zie [1]) een overzicht van de *Lesson Study* methode. In dit deel gaat ze in op haar ervaringen met Lesson Study in de praktijk.

Denkactiviteiten in de context van bewijzen in de meetkunde

De docenten, deelnemers aan de *Community of Learners* (CoL) in Twente, besluiten eensgezind zich in het voorjaar 2011 te concentreren op het onderwerp bewijzen en redeneren in 4-vwo, als voorloper op het onderwerp bewijzen in 5-vwo. Aansluitend op het artikel van Henk Rozenhart (zie [2]) geven de docenten aan dat dit onderwerp met meer overtuiging is aan te zwengelen als je een getallenvoorbeeld gebruikt. Bijvoorbeeld: 'Als n een natuurlijk getal is, dan is $n^2 - n + 41$ altijd een priemgetal' of 'Kwadraten van natuurlijke getallen eindigen nooit op een 2'. Soms lijkt een probleem meetkundig, terwijl dan achteraf de oplossingsstrategie weer algebraïsch is zoals bijvoorbeeld het probleem ***in figuur 1***.

De formule om het aantal vlakken bij n punten te berekenen lijkt op het eerste gezicht gewoonweg 2^{n-1}; nadere analyse leert echter dat dat niet klopt. Het juiste verband wordt gegeven door de formule:
$\frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$
Leerlingen zijn, volgens de docenten, gemakkelijk te motiveren om op zoek te gaan naar een bewijs. Maar hoe in de meetkunde? De meetkundevoorbeelden die in het boek staan, geven leerlingen niet de indruk dat een bewijs nu zo noodzakelijk en nuttig is. Toch willen de docenten in de CoL de uitdaging aangaan een meetkundevoorbeeld – een denkactiviteit – te gebruiken in 4-vwo, als introductie op de meetkunde in 5-vwo, ten einde leerlingen ervan te overtuigen dat een bewijs nodig is. Bij de uitvoering van de les zijn er zoveel mogelijk observanten om te registreren wat leerlingen nu precies doen en niet-doen. Dit is een kernelement van de Lesson Study.

Literatuuronderzoek

Elk van de docenten leest vooraf een artikel over onderzoek, en presenteert dat op de eerstvolgende bijeenkomst op de universiteit Dat kost tijd en vergt energie, maar dat kan ook omdat alle docenten 0,1 fte voor het participeren in de CoL krijgen (***figuur 2***).
In één van de artikelen, 'The role of contradiction and uncertainity in promoting the need to prove in dynamic geometry environments' (zie [3]), gaat het om de rol van tegenspraak en onzekerheid als stimulans om te gaan bewijzen, gebruikmakend van ICT. Verrassing kan stimulerend zijn. Kenmerkend voor bewijzen wordt genoemd: deductief redeneren, algemeenheden laten zien en systematiseren als intellectuele uitdaging.
De docenten komen op het idee om verwarring te zaaien, hetgeen misschien tot de noodzaak van bewijzen zou kunnen leiden. In een ander artikel 'Proofs through exploration in dynamic geometry environments' (zie [4]) wordt het zelf ontdekken, exploreren, communiceren en verifiëren met behulp van ICT sterk benadrukt. Concreet wordt aanbevolen 'open ended' vragen te gebruiken. In het artikel wordt gewaarschuwd voor teveel ict-gebruik, dat heeft een negatief effect: waarom zou je nog twijfelen? Je hoeft er zelf niets meer voor te doen – de tekeningen ontstaan veel te gemakkelijk. Op basis van het literatuuronderzoek wordt besloten dat de ene deelgroep zich concentreert op een activerende werkvorm met open vragen (een opdracht die bijna aan het einde van het hoofdstuk staat), terwijl de andere deelgroep zich toespitst op de deductieve, stapsgewijze aanpak.

Lesontwerpen en materiaal

Vanwege de grootte van de groep wordt besloten twee lessen te ontwerpen, die beide op drie verschillende scholen drie maal zullen worden uitgevoerd, waarvan twee maal bijgesteld.

Lesontwerp 1
De docenten willen leerlingen activeren en kiezen voor een inductieve aanpak. Ze maken een werkblad dat uit vier bladen bestaat (***zie figuur 3***).
De hand-out hierbij – het is opgave 41 uit *Getal & Ruimte* vwo-B (tiende editie; pag. 151) – staat ***in figuur 4***.

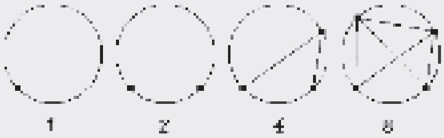
Lesontwerp 2
Het uitgangspunt is hier een puur deductieve aanpak, op grond van de postulaten van Euclides. De congruentiegevallen komen immers voort uit de postulaten. De docenten kiezen voor een plenaire start om daarna leerlingen zoveel mogelijk in groepen laten werken. De eerste vraag luidt: 'Waar denk je aan bij het vak meetkunde?' De docent gaat vervolgens in op het benodigde 'gereedschap', zoals definities, axioma's en stellingen, en eindigt met de vijf postulaten van Euclides. Het laatste postulaat krijgt extra nadruk. De les vervolgt met de zes elementen van een driehoek (drie zijden Z en drie hoeken H) en mondt uit in het noemen van het begrip congruentie. Er volgen drie opgaven die uitlokken tot een bewijs (***zie figuur 5***).
De les eindigt met de vraag een driehoek ABC te construeren met hoek A van 40°, AC = 5 cm en BC = 4 cm (ZZH).

Observatie

De observanten zijn naast CoL'ers ook collega's van dezelfde school en in een enkel geval een directielid (dat is helemaal mooi!). Ik zie en hoor, eind mei – midden in de examentijd – wat 4-vwo-leerlingen tegen elkaar zeggen.

Observatie(s) van lesontwerp 1
Op de eerste vraag 'Welke begrippen/methode/kennisfeiten komen bij je op als je denkt aan wat je de afgelopen jaren op school hebt geleerd op het gebied van meetkunde?' komen verrassende antwoorden: Pythagoras, sinus- en cosinusregel, *abc*-formule, … Geen van de leerlingen heeft het over figuren, gelijkvormigheid of congruentie. Eén leerling hoor ik zeggen: 'Het gaat om méétkunde?' Maar helaas, niemand luistert.
Bij de tweede vraag naar de oppervlakte van een rechthoekige driehoek die op ruitjes-

Neem een cirkel, plaats twee punten ergens op de cirkel en verbind de punten, waardoor je de cirkel in tweeën deelt.



Voeg nu een derde punt toe en teken lijnstukken die dit punt met de twee reeds bestaande punten verbinden. De cirkel is nu verdeeld in vier stukken.
Voeg nog een vierde punt en de verbindingslijnstukken toe en je komt op acht delen. Uit het vijfde punt en nog meer verbindingslijnen leveren zestien stukjes op. Maar als je nu een zesde punt en de bijbehorende lijnstukken toevoegt, krijg je geen 32 maar slechts 31 delen.

figuur 1
Verdeling van een cirkel

figuur 2
Samenwerken in een CoL

Eerste blad.
Welke begrippen/ methoden/ vaardigheden komen bij je op als je denkt aan wat je de afgelopen jaren op school op het gebied van meetkunde hebt geleerd? Noteer deze hieronder.

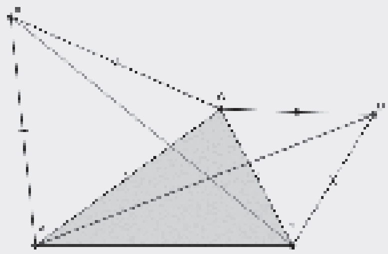
Tweede blad.
Bereken de oppervlakte van de onderstaande driehoeken.

Derde blad.
Wellicht dat je bij de voorgaande opdracht van de formule $O(\Delta) = \frac{b \times h}{2}$ gebruik hebt gemaakt.
Kun je aantonen dat deze formule ook geldt voor de onderstaande (willekeurige) driehoek? Doe dat!

Vierde blad.
Hand-out Meetkunde en Bewijzen – de versie zonder stappenplan

figuur 3
Korte inhoud van de werkbladen

Hand-out Meetkunde en Bewijzen



Te bewijzen: AD = BE (de lengtes van beide lijnstukken zijn gelijk)
Stappenplan:
Zoek welke paren driehoeken in aanmerking komen als congruente driehoeken. Vul onderstaande tabel in.

Driehoek met rood lijnstuk (BE)	Driehoek met blauw lijnstuk (AD)	Kenmerken / gelijkheid
ACE	[illegible]	
BCE	ADC	
ABE	[illegible]	
ABE	[illegible]	

Welke driehoeken kies je, welke congruentie gebruik je en wat moet je nu nog aantonen?

figuur 4
Hand-out bij de opgave

1. Construeer een driehoek ABC met drie zijden van 5 cm (ZZZ).
   Als het goed is, heeft iedereen dezelfde driehoek getekend.

2. Construeer een driehoek ABC met AB = 5 cm, ∠A = 60° en AC = 7 cm (ZHZ).
   Zijn nu alle getekende driehoeken weer gelijk?
   Waarom levert dit geval ZHZ en niet bijvoorbeeld ZZH?

3. Construeer een driehoek met ∠A = 50°, ∠B = 70° en ∠C = 60° (HHH).
   Zijn alle getekende driehoeken nu weer gelijk?

Voorlopige conclusie:
Bij 1. ZZZ levert congruente driehoeken.
Bij 2. ZHZ levert ook congruente driehoeken.
Bij 3. HHH levert geen congruente driehoeken.

De vraag is nu welke drietallen wel congruente driehoeken leveren en welke niet.

figuur 5
Opgaven om een bewijs uit te lokken

figuur 6
Schuiven met de geo-driehoek

papier is getekend, gaan leerlingen hokjes tellen en komen snel op het goede antwoord. Maar bij de volgende vraag naar de oppervlakte van een stomphoekige driehoek – met dezelfde hoogte als de vorige – tellen ze geen hokjes, maar proberen de driehoek te verdelen in kleinere driehoeken en dan op te vullen tot een rechthoek. Het lukt niet zo best, want de overgebleven stukken worden steeds kleiner en liggen steeds schever. Maar 'mijn groepje' geeft niet op. Ze gaan stug door en trekken zich helemaal niks aan van wat er op het bord gebeurt. Ze zien het niet eens.
De laatste vraag is uitdagend. In 'mijn groepje' wordt echter direct afgesproken het stappenplan niet te gebruiken – gewoon eerst zelf maar eens proberen. Ze komen er niet uit, luisteren niet naar het antwoord van de docent dat op het bord verschijnt. Ze vragen of de opdracht wat later (morgen) ingeleverd kan worden. Dat kan! Sterker nog – er is een prijs te verdienen voor degene die een alternatieve oplossing aandraagt. En ja, daar gaan ze voor. De leerlingen verlaten de les, discussiërend over een mogelijke oplossingsstrategie. 'Mijn groep' is écht van plan de prijs te winnen!

Observatie(s) van lesontwerp 2
Het is opvallend dat de leerlingen bij het oplossen van de problemen geen analysefiguren (schetsen) maken. Ze gaan rekenen, en áls ze tekenen (veelal met pen), dan is de tekening een weerslag van de gedachte. Er wordt geen passer gebruikt, er wordt met de geo-driehoek geschoven (***zie figuur 6***). Soms wordt er gevraagd 'of dat wel nauwkeurig is'. Maar dat valt in het niet… de argumenten die tellen, zijn berekeningen, geen tekeningen. Leerlingen gaan individueel aan het werk; logisch als er geen behoefte aan samenwerken is (ook niet gewend).
Bij de eerste opgave is er in 'mijn groepje' een meisje dat meteen op het idee van de hoogtelijn komt, dat overtuigt de anderen. Mooi klaar. Andere groepjes vragen zich af hoe groot de hoeken zijn, maar ook dat komt goed. Ook opgave 2 gaat goed; de leerlingen overtuigen elkaar met berekeningen die worden geïllustreerd door tekeningen. De laatste opgave is toch wel moeilijk. In 'mijn groepje' vragen de leerlingen zich allereerst af hoeveel mogelijkheden er zijn. Er wordt negen geroepen! Of toch niet? Daar was een formule voor, die ze vorig jaar gehad hebben. En jawel: het had te maken met drie uit een groep van twee, of twee uit een groep van drie. Acht – drie boven twee toch? Ja, ze zijn overtuigd: acht! Welke dan? Er wordt keurig een rij gemaakt. Zo gaat de tijd voorbij zonder aan de eigenlijke opdracht toe te komen. In een andere groep wordt zelfs zo fanatiek getekend dat het tafelblad er aan te pas komt. Het wordt snel

Mededeling / Vooraankondiging cTWO Wiskunde C conferentie

De grootste vernieuwing bij de landelijke invoering in 2015 van de herziene examenprogramma's voor wiskunde (havo en vwo) vindt plaats bij wiskunde C.
De vernieuwingscommissie cTWO organiseert mede daarom op **woensdag 14 maart 2012** voor de tweede keer een Wiskunde C-conferentie. Deze dag op de Hogeschool Domstad in Utrecht is bestemd voor docenten vo en andere belangstellenden.
Het vernieuwde wiskunde C-programma is volledig toegesneden op de belangstelling en mogelijkheden van de vwo-leerlingen in het profiel Cultuur en Maatschappij. De ervaringen, zoals die de afgelopen cursusjaren zijn opgedaan bij leerlingen en docenten van de pilotscholen, zijn erg de moeite waard zodat cTWO dit onder de aandacht van alle vo-docenten wil brengen. Temeer omdat in het huidige programma 60 studielasturen beschikbaar zijn in de vorm van Keuzeonderwerpen zodat hierbinnen onderdelen uit het vernieuwde programma heel goed inzetbaar zijn.
Ook zal op deze dag aandacht besteed worden aan allerlei praktische en organisatorische zaken rondom het vak wiskunde C.
Het (voorlopige) programma in het kort:
Start om 10:30 uur door Peter van Wijk, projectleider van cTWO;
Plenaire presentatie door Ionica Smeets (één van de Wiskundemeisjes): *Wiskunde in 1001 verhalen*;
Twee workshoprondes met de volgende onderwerpen: *Lesmodule Leesbaarheid* (Gerard Koolstra), *Lesmodule Geschiedenis van getallen* (Henk Reuling), *Het domein Algebra en tellen binnen het examenprogramma wiskunde C* (Piet Versnel), *Het CE Wiskunde C, het voorbeeldexamen* (Ger Limpens), *Geometrie in de kunst* (Carla Feijen), *Wiskunde C op HAVO?!* (Peter van Wijk), *Simon Stevin en Museum Boerhaave* (Steven Wepster), *De brug tussen kunst en wiskunde C* (Monique Pijls);
Plenaire presentatie door Ton Verhoef: *De wiskunst van Koos Verhoef*;
Afsluiting om 15:15 uur met borrel en snack.

Het programma met uitgebreide omschrijvingen van de presentaties en workshops is te vinden op de website van cTWO (*www.ctwo.nl*).
De toegang is **gratis**, dus noteer **woensdag 14 maart 2012** alvast in uw agenda! Wel is van te voren inschrijven noodzakelijk. Dat kan via een digitaal aanmeldingsformulier dat te vinden is op *www.ctwo.nl* onder het tabblad Wiskunde C (Nieuws). Er geldt: vol is vol!

Informatie
Verdere informatie kan worden verkregen bij het cTWO-projectteam: Theo van den Bogaart, Hielke Peereboom en Peter van Wijk (email: *info@ctwo.nl*).

met spuug weggepoetst (zo zie je maar, niks kwaads in de zin). Een ander groepje komt helemaal nergens – ze raken gedemotiveerd. Ze hebben niets aan elkaar …
Het is opvallend dat leerlingen helemaal vergeten dat observanten dicht naast hen zitten. Voor de observanten blijft het moeilijk om niet in te grijpen, even helpen, even …

Evaluatie

De docenten blijven een uur extra om te reflecteren. We zijn het allemaal roerend eens: nooit geweten dat leerlingen doen wat ze doen! Het geeft een kick, nu kun je beter op hen inspelen!

Evaluatie(s) van lesontwerp 1

Algemeen was de motivatie uitstekend.
De uitleg in de eerste les was te lang – het stappenplan kan weg. Dat weglaten beviel prima in de tweede les. Opvallend was dat leerlingen bij meetkunde de *abc*-formule noemen, en Pythagoras – ze komen niet op het idee van figuren of gelijkvormigheid. Ze noemen wel F- en Z-figuren. Aan de noodzaak tot bewijzen (het doel) kwam de docent uiteindelijk niet eens toe, te weinig tijd. Eén leerling zei zelfs: ‘Geef mij maar gewoon een les rekenen!’. Het is niet goed om halverwege de aandacht op te eisen – leerlingen willen zelf uitzoeken hoe het zit. Leerlingen kwamen zelf met de vraag ‘En hoe moeten we dat dan opschrijven?’ Ze kwamen met de term *congrueren*. De docent heeft na DE les nog drie andere lessen over hetzelfde onderwerp gegeven, zonder huiswerk (één vraag per les). Hij heeft er een goed gevoel over: leerlingen zagen zelf in dat de oppervlakte van een parallellogram niet verandert als de basis gelijk blijft.

Evaluatie(s) van lesontwerp 2

De leerlingen waren zeer gemotiveerd – de sfeer was prima. Euclides is nu niet een naam waar ze van opschrikken. De uitspraak ‘Een punt is een hoek waar de benen afgehaald zijn’ is verrassend. Het aanbieden van een minder gestructureerde opgave was een goede zet. Bij de congruentiegevallen kwamen leerlingen zelf op het geval ZZH. Eén leerling merkte zelfs op dat ZZR equivalent is aan ZZZ vanwege de stelling van Pythagoras. Wat betreft de noodzaak tot bewijsvoering ligt de zaak gecompliceerder. Er zijn wel veel sommen gemaakt. Een docent geeft aan dat er altijd een zekere druk is om veel sommen te maken, dan ben je weer bij! Er is wellicht te weinig stilgestaan bij sommige aspecten. De laatste vijf minuten zijn eigenlijk altijd al niet-productief, om rust te creëren. Het *socializen* is nu eenmaal een belangrijk aspect in het onderwijs. Een andere docent is destijds afgeknapt op het systematisch uitknobbelen van zes mogelijkheden. Aan het doel – motiveren om een bewijs te leveren – is niemand eigenlijk toegekomen. Volgende keer wordt verondersteld dat de motivatie toeneemt bij het oplossen van de opgaven uit *Getal & Ruimte*, opgeleukt met een Geogebra-applet. Maar, stuur je leerlingen nu naar het statische bewijs gebruikmakend van ZZH of naar het dynamische bewijs gebruikmakend van een transformatie?
Sommige leerlingen vragen: waarom ZZH en niet HZZ – tja, je kunt geen hoek tekenen zonder een zijde te gebruiken.
Eén docent observeerde alleen het punten slijpen en het niet-construeren van de bedoelde gelijkzijdige driehoek. Kennelijk vonden de leerlingen er niets aan. Van niet-succesverhalen leer je ook. De opgaven moeten dus anders, of de werkvorm…
Leerlingen leren van elkaar, van de onderlingen discussies. Een essentieel aandachtspunt blijft ook het ophalen van voorkennis.

Conclusie

Wat gaat er nu veranderen in de lessen die nog gegeven gaan worden? Het moet open! Laat leerlingen meer zelf uitzoeken en daag ze uit. Dat kost tijd, maar je wint er ook veel mee zoals motivatie.
Observeren is ook een vak, de een vindt alles opschrijven teveel, een ander observeert gedrag en inhoud en vindt interveniëren geen punt, juist omdat hij alles wil weten. Weer een ander observeert subjectief, maar heeft er dan ook veel aan (gewoon, wat je opvalt, noteer je). Toch moet er een heldere afspraak komen over de manier van observeren.
Het doel – uitdagen tot bewijsvoering in de meetkunde – is niet voldoende tot zijn recht gekomen. Het blijkt weer dat het ontwerpen en het implementeren daarvan op allerlei onverwachte hindernissen stuit. Wel is naar voren gekomen dat leerlingen gemotiveerd aan het werk gezet kunnen worden met uitdagende opdrachten – denkactiviteiten.

Noten

[1] Nellie Verhoef (2011): *Lesson Study*, deel 1. In: *Euclides* 87(3); pp. 111-113.
[2] Henk Rozenhart (2011): *Kleine didactieken*. In: *Euclides* 86(6); pp. 275-277.
[3] N. Hadas, R. Hershkowitz, B.B. Schwarz (2000): *The role of contradiction and uncertainity in promoting the need to prove in dynamic geometry environments*. In: *Educational Studies in Mathematics* 44; pp. 127-150.
[4] C. Mousoulides, N. Pitalis, M. Pitta (2004): *Proofs through exploration in dynamic geometry environments*. In: *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics*; volume 2, pp. 215-222.

Over de auteur

Nellie Verhoef is onderzoeker en vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente.
E-mailadres: *n.c.verhoef@utwente.nl*