Honderd jaar, deel 1

HONDERD JAAR VAN HIELE

Zijn de denkniveaus van Van Hiele op-sterven-na dood of springlevend?

[Harrie Broekman, Nellie Verhoef]

Inleiding

Op de valreep is op de Universiteit Twente de honderdste verjaardag van Pierre van Hiele gevierd in de namiddag van de 10e december 2009. Harrie Broekman heeft hem goed gekend, en herdacht zijn leermeester en collega met tal van unieke persoonlijke herinneringen. Nellie Verhoef ging vervolgens in op zijn gedachtegoed en de bruikbaarheid daarvan in het wiskundeonderwijs. Rainer Kaenders sloot de rij door een relatie te leggen tussen zijn niveautheorie en het wiskundig besef. Het bonte gezelschap in de zaal bestond uit studenten van de lerarenopleiding, geïnteresseerde – vooral wat oudere - wiskundedocenten , en twee oud-leerlingen van Pierre.

Pierre van Hiele, de man die je niet zomaar vergeet, één van de grondleggers van het wiskundig denken en een schakel tussen fenomenologie en epistemologie.

Pierre van Hiele, een man die je niet zomaar kunt vergeten.

Harrie Broekman gebruikte als titel voor zijn presentatie: "*De mens, de leraar-onderzoeker, zoals ik hem heb leren kennen*". Dit mede omdat hij samen met de honderdjarige en diens dochter Marian kort voor het Symposium nog een aantal – deels gemeenschappelijke - herinneringen had opgehaald. Herinneringen over *foto's en fotograferen, lesgeven, eigen lesgeven onderzoeken, lesmateriaal maken,* maar ook *denken niet begrepen te worden, willen overtuigen en blijven geloven in de mogelijkheid om het wiskunde onderwijs te verbeteren door te observeren en na-te-denken.*

Daarbij moeten we ons wel realiseren dat hij weliswaar fragiel is, maar nog steeds trots op zijn werk, het werk van zijn vrouw Dieke en de gedeeltelijke voortzetting door zijn dochter Wiesje in Nieuw Zeeland. Hij wenst ons dan ook een 'goed' Symposium, en vindt het jammer dat de reis van Voorburg naar Enschede voor hem toch te lang duurt.

"Praten jullie maar over mijn didactiek; nou ja, eigenlijk over die van Dieke en mij".

De dubbelpromotie van hem (vooral de theoretische optiek) en zijn vrouw Dieke (met de sterk praktische optiek) in 1957 is een belevenis geweest voor velen, niet alleen omdat het een belangrijk moment was voor de verdere didactische ontwikkeling in ons land (de praktijk van het lesgeven hand in hand met de theorie ontwikkeling) maar tevens door een – voor die tijd – hilarisch moment. Er werd namelijk - tegen de toenmalige gewoonte in - uit de zaal een vraag gesteld. Het antwoord van Pierre was even duidelijk als verhelderend: *dat is de domste opmerking die ik tot nu gehoord heb.*

Achteraf gezien typeert dit voorval wel een karaktertrek (slecht tegen in zijn ogen 'domme' gesprekspartners kunnen) die hem parten speelde bij het verkrijgen van echte erkenning binnen het didactiek wereldje in Nederland.

Het duurde ook lang voor de aanhangers van de niveau theorie van Piaget accepteerden dat Van Hiele sprak over niveaus gebaseerd op onderwijs/instructie, terwijl Piaget en zijn aanhangers hun niveaus los zagen van onderwijs, dus meer als een 'natuurlijke' ontwikkeling. We zouden nu zeggen: een tegenstelling tussen aanhangers van *nurture* en die van *nature.*

Het doet hem dan ook genoegen dat op Googleteksten staan als:

The hierarchy for learning geometry described by the van Hieles parallels Piaget's stages of cognitive development. One should note that the van Hiele model is based on instruction, whereas Piaget's model is not.

The van Hiele model supports Vygotsky's notion of the "zone of proximal development" which is the "distance between the actual developmental level as determined by independent problem solving and the level of potential development as determined through problem solving under adult guidance or in collaboration with more capable peers.” (Vygotsky, 1978, p. 85-86)

De leraar ‘Mijnheer van Hiele’.

Na de beschrijving door Fred Goffree van zijn interview met Pierre van Hiele en het interview door Gerard Alberts en Rainer Kaenders lijkt er weinig toe te voegen over de persoon en leraar-onderzoeker die ik gekend heb. Maar misschien is het voor de duidelijkheid goed om te weten hoe onze eerste ontmoeting plaats vond. Als beginnend student gaf ik bijlessen en na te zijn benaderd door de ouders van een van Pierre’s leerlingen besloot ik hem te bellen en mocht ik langs komen om over die bijlessen te praten. Maar dat verliep anders dan ik verwachtte; ik kwam niet verder dan de voortuin van zijn huis in Bilthoven en kreeg toen mijn ‘eerste didactische pak slaag’ .

Bijles aan een leerling van de wiskunde leraar Mijnheer van Hiele:

- Hoe haalde ik als student het in mijn hoofd om een leerling van hem geen kans te geven fatsoenlijk wiskunde te leren?
- Wist ik wel dat leren tijd vergt en niet even in een uurtje bijles …
- En heb je wel eens bedacht dat …leerlingen moeten leren praten, zichzelf vragen leren stellen, je moet ze helpen te zien wat ze aan het doen zijn, ze iets geven waar ze plezier aan kunnen beleven, …
- Om vooral niet te vergeten dat …’je kunt hun geest niet kneden, alleen helpen …’

Uiteraard zijn dit herinneringen; in die tijd was ik alleen maar overdonderd en het duurde nog een hele tijd voor ik met hem over al dit soort zaken kon praten.

Pas nadat we aan de praat geraakt waren ging ik ook eens op zoek naar literatuur van zijn hand en begon – als beginnend leraar – met oude en nieuwe nummers van Euclides, zoals een nummer uit ‘54/’55, waaruit het volgende citaat:

“Noodzakelijk is, dat men de kinderen liefde voor de wiskunde bijbrengt. Daarin kan men slagen, als men hen eerst de vreugde van het maken van mooie dingen met behulp van wiskunde laat beleven en hen er dan gaandeweg toe brengt ook de beknoptheid en duidelijkheid van de wiskundige bewijsvoering te waarderen”.

En enige jaren later:

"De gedachte, die aan al mijn voordrachten van de laatste jaren ten grondslag ligt, is, dat er een discussie mogelijk is over het lesgeven, anders dan op basis van intuïtie." Dr P.M. van Hiele(1959)

Dit nam niet weg dat hij zelf moeite had met leraren die wilden discussiëren in plaats van luisteren (bijv. bij de COCMA cursussen) Gelukkig kon hij flink knokken als hij er een zin in zag. Dat gold zijn knokken voor leerlingen waar hij iets in zag, maar ook voor jongere collega's. Mijn aanstelling als zijn opvolger bij de COCMA cursussen werd 40 jaar geleden tegengewerkt door de toenmalige inspecteur, maar Pierre en de cursusleider De Jongh hielden vol. Achteraf vertelde hij dat dit goed was voor een jonge docent; door een stukje opleiding te verzorgen voor anderen werd je gedwongen na te denken over onderwijs en daarover te praten. "Dat was net zo iets als lesgeven en dat lesgeven onderzoeken". Zijn idee dat iedere leraar zijn eigen onderwijs activiteiten zou moeten onderzoeken was niet voor niets een afspiegeling van zijn eigen professionele leven. Maar hij verzuchtte toch ook wel eens dat zo'n baan aan de universiteit 'wel iets had vanwege de extra tijd en ondersteuning voor het onderzoek'.

Van Hiele en het fotograferen; op zoek naar structuur.

Gelukkig heeft hij altijd tijd gemaakt voor zijn hobby 'fotografie' en wist hij die hobby ook te gebruiken t.b.v. van zijn boodschap '*het gaat om structuur'* .

Maar ook bij structuur kun je als leraar 'te vlug' willen zijn en het grondniveau van bijvoorbeeld het herkennen van een regelmaat als vanzelfsprekend te beschouwen en te proberen versneld via het verbale naar het abstracte/formele niveau van formules te (willen) gaan, zoals in 'Look! 'regularity?'   'Formulate!'.

LOOK! **REGULARITY?** **FORMULATE!**

JUSTIFY & PROOF!

1	**=**	**0**	**+**	**1**
2 + 3 + 4	**=**	**1**	**+**	**8**
5 + 6 + 7 + 8 + 9	**=**	**8**	**+**	**27**
10 + 11 + 12 + 13 + 14 +15 + 16	**=**	**27**	**+**	**64**

- **Can you see any regularity in this ‘pattern’?**
- **Describe the rule you recognise in your own language.**
- **Describe the rule with the help of a mathematical notation.**
- **Convince a friend of the appropriateness of this rule.**
- **Proof it!** ***(something like convincing a math teacher, isn’t it?)*** [1]

[1] Describing and convincing, not only yourself or a friend but even a mathematics teacher is very helpfull to deepen insight and by that also for building a reportoire of useful problem solving tools.

Het zoeken naar de essentie van een waarneming en dat vastleggen m.b.v. foto’s was van jongs af aan Pierre’s hobby. Voor de oorlog won hij al eens een prijs met de foto van een locomotiefje met zandtreintjes er achter, mede door de naam die hij er aan gaf, namelijk *brilslang*. De foto’s in zijn prachtige boek *Struktuur* zijn dan ook vrijwel allemaal door hem zelf gemaakt.

Pierre op bankje met fototoestel

Een andere hobby was hiermee verwant: het observeren van leerlingen en het beschrijven van hetgeen hij gezien had. Het deed hem dan ook veel genoegen als anderen probeerden 'iets te doen met hun observaties', hun observaties te 'beschrijven m.b.v. niveau's' . Of nog mooier: 'in andere gebieden dan de meetkunde een niveau theorie te ontwikkelen' zoals Bram Lagerwerf en Fred Korthagen deden voor de opleiding van leraren.

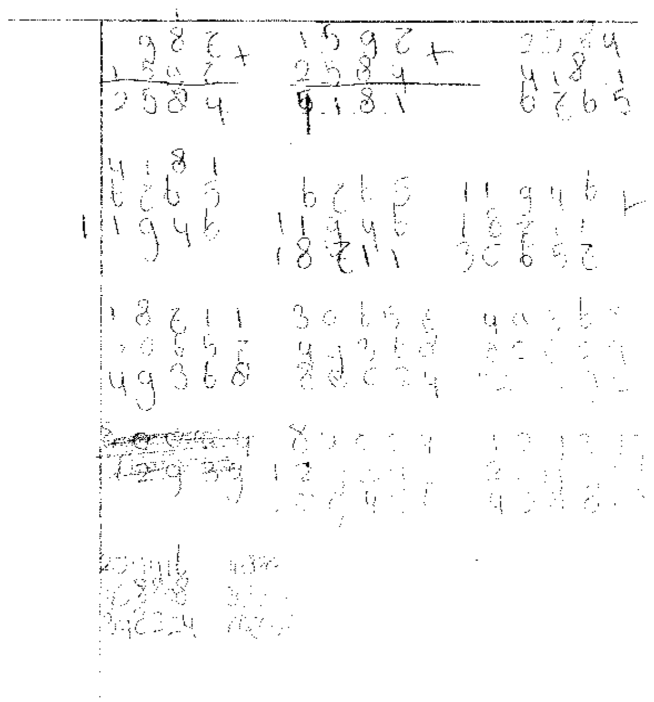
Wel benadrukte hij telkens het belang van het (visuele)grond niveau, en was hij dan ook niet verwonderd toen ik hem vertelde van het – voor mij toch onverwachte – resultaat bij het mini experimentje met een groep 12/13 jarige brugklassers:

Op het bord werden de getallen 3 5 8 geschreven en aan de leerlingen werd gevraagd deze getallen op een blaadje te schrijven en er een vierde getal achter te zetten. Ik verwachtte dat de sterke structuur voor een aantal leerlingen zou zijn '2 er bij; 3 er bij; dus nu 4 er bij geeft 12'. Eventueel de structuur3 + 5 = 8, dus nu 5 + 8 = 13.

Maar er kwamen merendeels geheel andere reacties, zoals die van Fausia (12,5jaar) die het getal 10 koos als vierde getal: *"het is mijn lievelingsgetal".*
Zij toonde geen basisgevoel voor wat we kunnen noemen zoeken naar een mogelijke regelmatige voortzetting (een structuur).

Ik: Je mag eventueel een ander getal kiezen om het makkelijk te maken ook een vijfde, zesde, enz. getal te vinden. En nog kozen de meeste leerlingen niet voor de 'regelmaat' die ik probeerde te suggereren, maar luk raak voor volgende getallen.

Een leerling die wel voor een 'structuur' koos 3, 5, 8, 13, 21, … ging rustig verder met rekenen toen ik hem vroeg of hij het vijftigste getal kon vinden. Zijn commentaar was: *Ik doe het maar zo; ik dacht, dan vind ik misschien een kortere manier.* En hij ging onverstoorbaar verder.
Wat doe je dan als leraar?



Kladblaadje van Tonnie (12,4 jaar)

De lokale werkzaamheid (het rekenen, rekenen, en nog eens rekenen; kortweg: *uit de hand lopend rekenen*) stond op gespannen voet met het globale vermoeden dat er een kortere oplossingsweg moet bestaan. Pierre zou zeggen: "**op weg naar begrip en inzicht**".

Uiteraard is een nette stapsgewijze aanpak mogelijk, maar een vraag die ook door Van Hiele niet is beantwoord luidt: *hoeveel kunnen wij door aangepaste opdrachten het leerproces vervroegen respectievelijk versnellen?*

Bijvoorbeeld door als docent eerst zelf hardop te zeggen dat je 5 bij 3 hebt opgeteld en zo 8 kreeg? En dan 8 bij 5 optelt en zo 13 krijgt. De leerlingen mogen dan het 10^{e} en het 20ste getal 'zoeken'.

Een volgend niveau is het invullen van een tabel (wat een voorspellen kan inhouden); nog een stap verder is het beschrijven in woorden of in 'algebra taal' hoe ze aan het 10^{e} resp. het 20ste getal komen. En dan ook maar het n^{e} getal?

Michael Stalo et all. hebben beter nagedacht over niveaus en gebruikten bijvoorbeeld de volgende drie opgaven om de verschillende niveaus aan te duiden (en te toetsen):

3 6 11 18 … … …

1. Zoek/bereken de drie volgende getallen in bovenstaand patroon.
2. Vul de tabel in.

plaats	1ste	2de	3de	4de	5de	6de	7de	20ste	100ste
getal									

3. Beschrijf in woorden of met symbolen een regel die je kan helpen een getal op een 'willekeurige' plaats te vinden.

Literatuur

Gerard Alberts& Rainer Kaenders, 2005, Interview Pierre van Hiele "Ik liet de kinderen wel iets leren", *Nieuw Archief voor Wiskunde*, 5/6, 3, pp. 247-251.

Fred Goffree (ed), 1985, *Ik was een wiskundeleraar*, SLO, Enschede.

P.M. van Hiele, 1954/55, Pakkend materiaal ter inleiding van meetkundige grondbegrippen, *Euclides 30,* 248-262.

Dr. P.M. van Hiele, 1959/60, Nieuwe onderwerpen in de wiskunde. Mogelijkheden en criteria, *Euclides 35,* 177-186.

Dr. P.M. van Hiele, Aan welke didaktische principes behoort ons onderwijs van elke dag te voldoen en welke invloed heeft dat op de methode?, *Euclides 45, 1,* 26-29.

Fred Korthagen, Bram Lagerwerf, Reframing the Relationship Between Teacher Thinking and Teacher Behaviour: levels in learning about teaching, *Teachers and Teaching: theory and practice, Vol.2, No.2, 1996.*

B.Lagerwerf en F. Korthagen, Niveaus bij het leren, *NW, Tijdschrift voor Nederlands Wiskundeonderwijs,* april 1992.

Michael Stalo, Iliada Elia, Athanasios Gagatsis, Athina Theoklitou, Andreas Savva *Levels of understanding of patterns inmultiple representations*, Department of Education, University of Cyprus, Cyprus

Honderd jaar, deel 2

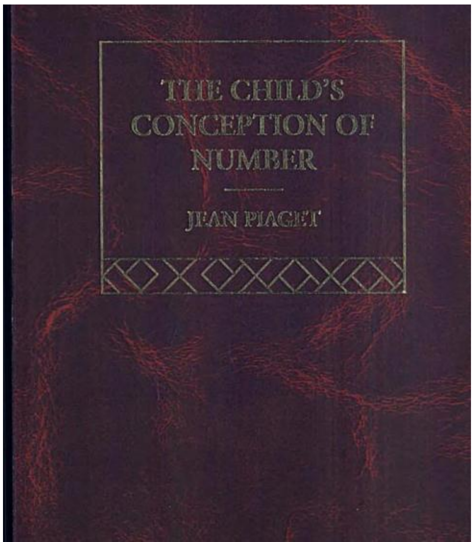
HONDERD JAAR VAN HIELE

Denkniveaus van Van Hiele, de bron van wiskundig besef?

Pierre van Hiele op 16-11-2009

Pierre van Hiele, één van de grondleggers van het wiskundig denken

Ooit lag Pierre van Hiele in de clinch met Piaget, de ontwikkelingspsycholoog. Het verschil in inzicht spitste zich toe op de omstandigheden waarin de experimenten plaatsvonden.



Piaget deed experimenten, beschreven in *The Child's conception of Number* (1952), die als volgt verliepen:

Op een tafel, met aan de ene kant een onderzoeker en aan de andere kant een driejarig meisje, staan vijf poppen tegenover vijf paraplu's. De vraag aan het kind: "Waarvan zijn er meer, poppen of paraplu's?". Antwoord: "Er zijn precies evenveel poppen als paraplu's". "Heeft elke pop een eigen paraplu?". "Ja". Nu worden de paraplu's bij elkaar gehouden. Aan het kind de vraag: "Waarvan zijn er meer, poppen of paraplu's?". Antwoord: "Nu zijn er meer poppen". "Heeft elke pop een eigen paraplu?". "Nee, er zijn meer niet genoeg paraplu's". Deze test laat dit resultaat altijd zien, tot kinderen van een jaar of vijf – ook al kunnen ze al tot tien tellen. Dat betekent dat kinderen wel in staat zijn tot tellen (1-2-3-4-5) maar niet het verschil beseffen tussen aantal (5) en hoeveelheid (1). In wiskundige termen wel in staat zij tot tellen betekent niet het begrip van een verzameling met een constant kardinaalgetal.

Van Hiele bekritiseerde de afwezigheid van het laten leren van kinderen, het veranderen van de omstandigheden. Zo imiteerde Van Hiele in 1953 de experimenten van Piaget met zijn eigen driejarige dochter als volgt:

Ook dit kind reageert zoals verwacht op het samennemen van de paraplu's. Echter, nu komen er drie poppen op tafel tegenover vijf paraplu's bij elkaar. Het kind zegt: "Natuurlijk zijn er meer paraplu's". "Waarom?" "Dat is gemakkelijk te zien, er zijn vijf paraplu's en maar drie poppen. De paraplu's zijn alleen bij elkaar genomen." Daarna volgde het experiment met de vijf poppen en de vijf paraplu's. "Zijn er paraplu's te weinig?" "Nee, je hebt ze bij elkaar genomen." Na korte tijd, zo gaat het verhaal van Van Hiele verder, komt zijn vijfjarige dochter Annely van de Montessori-school thuis. Zij krijgt dezelfde test en ze laat zich eveneens om de tuin leiden. Haar jongere zusje zegt vervolgens: "Annely, sufferd, zie je dan niet dat er nog steeds vijf paraplu's zijn?" Annely zegt: "O, ja ik zie het, je hebt ze bij elkaar gestopt."

Van Hiele benadrukte met deze experimenten dat de cognitieve ontwikkeling van kinderen te beïnvloeden is, mits er gebruik wordt gemaakt van daarvoor geschikt leermateriaal. De vrouw van Pierre, Dieke van Hiele-Geldof, heeft zich beziggehouden met de ontwikkeling van dit type materiaal. Ze onderscheidde daarin een vijftal stappen: informeel, geleide oriëntatie, explicitering, vrije oriëntatie en integratie. Deze stappen zullen bij velen een herinnering oproepen aan de leerstofordening van Joop van Dormolen mat zijn befaamde OSaEV-model: oriënteren, sorteren, abstraheren, expliciteren en verwerken. Pierre en Dieke promoveerden in 1957 bij de wiskundige Freudenthal en de pedagoog en ontwikkelingspsycholoog Langenveld samen op het proefschrift *De ontwikkeling van het inzicht.*

Echter, vooral Richard Skemp (Warwick, UK) met zijn pionierswerk op het gebied van het wiskundig denken heeft een fundament gelegd voor het tot stand komen van de niveautheorie van Van Hiele. Skemp legde zich toe op het begrijpen van wiskundige begrippen. Hij onderscheidde instrumenteel begrijpen van relationeel begrijpen. Beide typen zijn onlosmakelijk met elkaar verbonden. Plat gezegd gaat het om 'snappen wat je doet' en 'snappen waarom je het doet', een vraag die nu nog uiterst actueel is. In zijn spraakmakende artikel *Relational understanding and instrumental understanding* (1976) gaat hij ook in op de voor- en nadelen van beide. Relationeel begrijpen beklijft, geeft inzicht en is maximaal bruikbaar. Instrumenteel begrijpen is gebaseerd op herkenning, herinnering en gemakkelijk oproepbaar. Later heeft Skemp ook benadrukt dat instrumenteel begrijpen óók een vorm van begrijpen is. Van Hiele ging door op het spoor van begrijpen en onderscheidde daarin vier niveaus: het visuele, het beschrijvende, het informeel deductieve en het theoretisch deductieve niveau. Van Hiele concentreerde zich op (Euclidisch) meetkundige begrippen. Ter illustratie volgt het klassieke voorbeeld van **de gelijkbenige driehoek**.

1. Het visuele niveau, ook wel het nulniveau of het nulde niveau genoemd

Op dit niveau gaat het om het intuïtief ontdekken van eigenschappen door ermee te spelen: verschuiven, verdraaien, spiegelen etc.

2. Het beschrijvende niveau

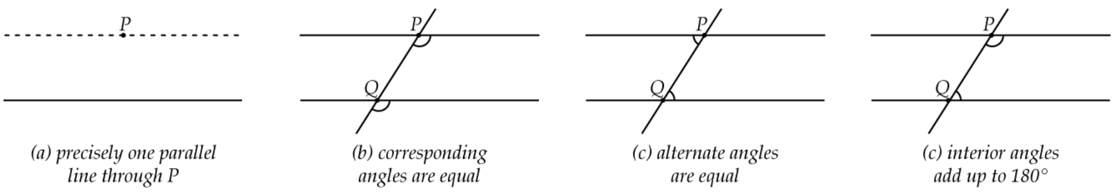
De ontdekking van eigenschappen:

- twee gelijke benen
- twee gelijke hoeken
- hoogtelijn uit de top snijdt de basis middendoor
- bissectrice van de tophoek snijdt de basis middendoor
- middelloodlijn van de basis gaat door de top
- de gelijkbenige driehoek is lijnsymmetrisch, niet puntsymmetrisch
- de gelijkbenige driehoek is niet draaisymmetrisch

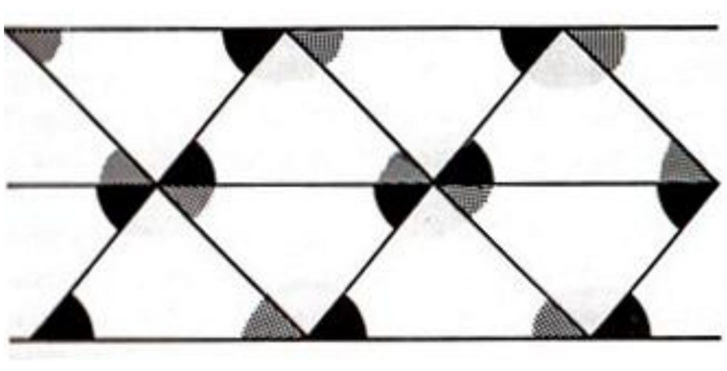
Kort schematisch samengevat: cirkel uit de beide eindpunten van een lijnstuk om, met een vast stuk tussen de passer… Een uitbreiding hiervan gaat over gelijkzijdige driehoeken die bovendien punt- en draaisymmetrisch zijn.

3. Het informeel deductieve niveau

Met de eigenschappen van driehoeken als uitgangspunt worden onderling verbanden gelegd:



In een patroon:



Informeel zijn in het patroon overstaande hoeken, Z-hoeken en F-hoeken gelijk.

4. Het formeel theoretische niveau

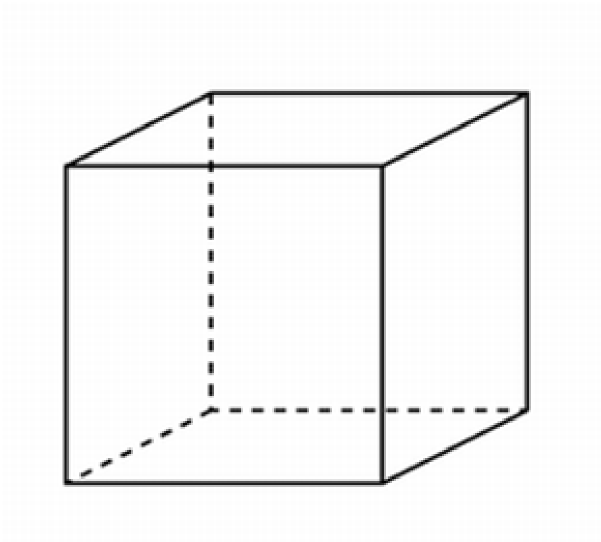
De vier genoemde eigenschappen zijn equivalent, het zijn verschillende aspecten van hetzelfde concept: het concept van evenwijdige lijnen in de Euclidische meetkunde. Formeel zijn de stellingen over gelijke hoeken (b), (c) en (d) te bewijzen als (a) gegeven is.

Een volgende vraag zou kunnen zijn hoe die verschillende niveaus eruit zouden zien, als het om drie- in plaats van tweedimensionale objecten gaat. Als oefening zouden we eens kunnen kijken naar de **kubus**.

Natuurlijk zal er op het visuele niveau 'gespeeld' worden met allerlei drie-dimensionale objecten: rond, hoekig, maar ook vol, hol of als draadmodel.


De eigenschappen op het beschrijvende niveau gaan over zes even grote vierkanten die twee aan twee loodrecht op elkaar staan. Kort samengevat:

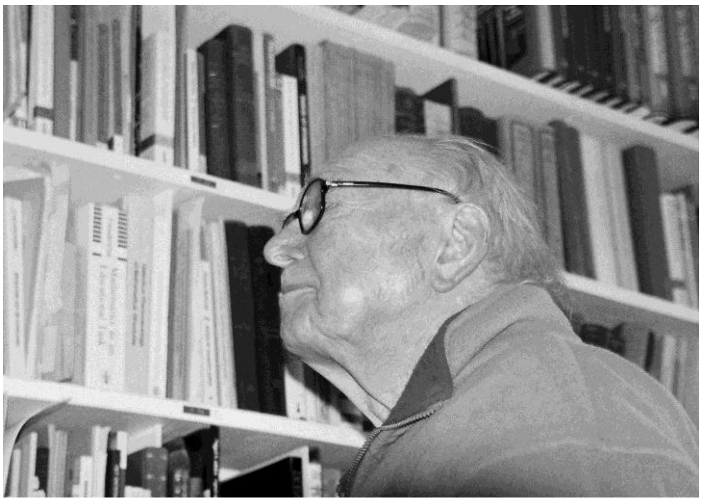
verschuif vier gelijke zijden met één rechte hoek over een afstand die even lang is als die zijde, herkenbaar in de scheve parallelprojectie van één object:



De verbanden op het informeel deductieve niveau spitsen zich toe op definities die betrekking hebben op de eigenschappen zoals evenwijdigheid en loodrechte stand. De constructie kan op vele equivalente manieren plaatsvinden. Op het formeel theoretische niveau worden de stellingen in een coherent framework gezet. Figuren worden beschouwd als platonische objecten met eigenschappen die via Euclidische bewijsvoering aan elkaar worden gekoppeld.

Zijn de niveaus terug te vinden in is de huidige schoolboeken? Kijkt u zelf en oordeel zelf!

Pierre van Hiele, een schakel tussen fenomenologie en epistemologie



Begrip en Inzicht

De voordracht van Rainder Kaenders maakte goed duidelijk dat ook bij een symposium de mogelijkheid bestaat door te stoten naar een theoretisch niveau van didactiek. In zijn bijdrage “Vanuit Van Hiele naar Wiskundig Besef “ liet Rainder Kaenders (Koln) zien dat hij en zijn collega Ladislav Kvasz uit Praag de niveau theorie van Van Hiele samenbrengen met ideeën van andere grote denkers op het gebied van wiskunde onderwijs. Uiteindelijk belandde hij bij de gevleugelde uitspraak van Gattegno:

only awareness is educable (alleen besef is onderwijsbaar) .

Dit is niet de plaats om hier nader op in te gaan. Daarom zou het goed zijn als Kaenders en Kvasz bereid gevonden zouden worden hun verhaal in zijn geheel te publiceren.

Literatuur:

Piaget, J. (1952). *The Child’s conception of Number.* London: Routledge & Kegan Paul.

Hiele, P.M. van (1957). *De problematiek van het inzicht.* Dissertatie. Utrecht.

Hiele, P.M. van (1973) *Begrip en Inzicht.* Purmerend: Muusses.

Hiele, P.M. van (1981) *Structuur.* Purmerend: Muusses. [heruitgave: *Structuur*, 1997, Thieme, Zutphen].

Hiele-Geldof, D. van (1957). *De didactiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O..* Dissertatie. Utrecht.

Skemp, R. (1976), Relational understanding and instrumental understanding, *Mathematics Teaching, 77,* 20-26.

Apart bijgevoegd;

Kladblaadje leerling 2 Ronnie bij deel 1

Dia (foto) van Pierre voor z'n boekenkast bij deel 2