

ZIGGY

ZEER INTERACTIEVE GONIOMETRIE

ELLEN KAMP

ANJO ANJEWIERDEN

TON DE JONG

*Dit onderzoek is gefinancierd met subsidie van Kennisnet in het kader van de
stimuleringsregeling Kennis van Waarde Maken*

Kennisnet
UNIVERSITEIT TWENTE.

Enschede, 03 juni 2013
Faculteit Gedragwetenschappen
Vakgroep Instructietechnologie

SAMENVATTING

Goniometrie is voor veel leerlingen een moeilijk onderdeel van de wiskunde. In basis goniometrie draait het om het gebruiken van goniometrische functies (sinus, cosinus, tangens) om onbekende waarden in een driehoek te bepalen. Er is weinig computerondersteund leer materiaal te vinden over dit lastige onderwerp en het meeste is verouderd en heeft een sterk 'drill and practice' karakter. In dit project is een applicatie ontwikkeld en getest, Ziggy genaamd (Zeer Interactieve Goniometrie), die leerlingen via "touch" laat interacteren met interactieve driehoeken. Leerlingen kunnen driehoeken manipuleren door vorm en grootte te veranderen, en het effect van deze manipulaties op hoeken, zijden en goniometrische verhoudingen observeren. De applicatie is getest in een kleinschalige studie met 28 vwo leerlingen uit twee klassen van de Waerdenborch in Goor. Een experimentele groep die gedurende twee lessen heeft gewerkt met Ziggy is vergeleken met een controlegroep die 2 vergelijkbare lessen volgden op een traditionele manier. De experimentele groep was een zogenoemde 'iPad klas' en bestond uit 4 meisjes en 10 jongens. De controle groep bestond uit 8 meisjes en 6 jongens. Deze resultaten van het onderzoek laten geen verbeterde leerresultaten van de experimentele groep zien ten opzichte van de controle groep. Er worden verschillende mogelijke verklaringen aangedragen voor dit feit, waaronder enkele technische problemen tijdens het uitvoeren van het experiment. Aanpassingen aan de applicatie en verder onderzoek zal moeten uitwijzen of Ziggy in een gewijzigde vorm wel effectief is en inzicht in de basis goniometrie kan vergroten.

Dit onderzoek is gefinancierd door Kennisnet in het kader van de Stimuleringsregeling Educatief Onderzoek.

Wij willen de docenten bedanken die hebben meegeholpen bij de ontwikkeling van Ziggy en bij het uitvoeren van ons onderzoek. Onze speciale dank gaat uit naar Wouter van Doorn, Ricco Veldkamp en Marion Alferink voor hun enthousiasme en flexibiliteit. Hieronder vindt u een link naar de applicatie.

<http://ziggy.gw.utwente.nl/>

Inhoudsopgave

Samenvatting.....	2
1. Inleiding.....	4
1.1 Probleemstelling.....	4
1.2 Tablets en goniometrie.....	5
1.4 Onderzoeksvraag & hypotheses.....	6
2. Ziggy.....	6
2.1 Ontwerp.....	6
2.2 Vergelijkingen oplossen.....	8
2.3 Uitlegpagina's.....	9
2.4 Opgaves.....	9
3. Onderzoek.....	11
3.1 Deelnemers.....	11
3.2 Procedure.....	11
3.3 Natoets.....	13
4. Resultaten.....	14
5. Conclusie en discussie.....	15
6. Referenties.....	17

1. INLEIDING

1.1 PROBLEEMSTELLING

Wiskunde is voor veel leerlingen een lastig vak. Veel wiskunde vereist een combinatie van ruimtelijk inzicht, logisch denken en het toepassen van abstracte regels. Een voorbeeld van een onderdeel in de wiskunde waar deze kenmerken voor gelden is de goniometrie. In (basis) goniometrie draait het om het berekenen van hoeken en zijden met behulp van de stelling van Pythagoras, de 180° graden regel en de goniometrische relaties sinus, cosinus en tangens. Deze goniometrische relaties (en de stelling van Pythagoras) gelden alleen voor rechthoekig driehoeken. Door veelhoeken op te delen in rechthoekige driehoeken kunnen de basisrelaties worden toegepast.

In de onderbouw van de middelbare school focust onderwijs op het gebied van goniometrie zich voornamelijk op de procedurele vaardigheden die nodig zijn bij het oplossen van een goniometrisch probleem. Leerlingen leren hoe ze een hoek of een zijde kunnen berekenen met behulp van het SOS-CAS-TOA ezelsbruggetje (zie figuur 1). De lessen draaien om leren het herkennen van rechthoekige driehoeken in complexe figuren, het onderscheiden van de verschillende zijden in een driehoek en

<i>Ezelsbruggetje</i>	
SOS	$Sinus = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Schuine zijde}}$
CAS	$Cosinus = \frac{\text{Aanliggende zijde}}{\text{Schuine zijde}}$
TOA	$Tangens = \frac{\text{Overstaande zijde}}{\text{Aanliggende zijde}}$

FIGUUR 1 SOS-CAS-TOA

het bepalen en toepassen van de juiste formule voor het berekenen van een hoek of zijde. De focus ligt hierbij op het produceren van een correct antwoord, waarbij weinig aandacht is voor daadwerkelijk inzicht in goniometrie. Naast het (procedureel) kunnen oplossen van dit soort problemen is inzicht in de samenhang tussen hoeken en goniometrische functie essentieel.

(Blackett & Tall, 1991).

Het (spaarzame) onderzoek naar het leren en begrijpen van goniometrie laat zien dat dit voor leerlingen een zeer moeilijk onderwerp is (Weber, 2005). Niet alleen het onderzoek naar het leren van goniometrie is schaars, ook de ontwikkeling van computerondersteund leermateriaal is zeer beperkt. Het aangeboden materiaal bestaat vaak uit statische opgaves die op een webpagina worden aangeboden en waarbij een antwoord moet worden ingevuld en opgestuurd. Wikiwijs levert bij zoeken op goniometrie slechts 18 hits op waarbij interactief materiaal wordt aangeboden en het merendeel van deze hits zijn opgaves waar een numeriek antwoord kan worden gegeven dat vervolgens wordt gecheckt. Slechts het materiaal van Math4all geeft de gelegenheid tot echte interactie, maar dan nog steeds in vrij beperkte mate. Ook een zoektocht naar materiaal op internationale websites levert weinig op. Wat er gevonden kan worden is vaak zeer gedateerd, op een enkele uitzondering na, en heeft een “drill and practice” karakter (Wilson, 2008). Modern

materiaal dat effectief gebruik maakt van de mogelijkheden van moderne technieken als tablets is er weinig.

Binnen het huidige project is een applicatie ontwikkeld en getest voor het leren van de basis goniometrie. De applicatie, Ziggy genaamd (afgeleid van: Zeer Interactieve Goniometrie) is voornamelijk bedoeld voor tablets, waarbij leerlingen via touch kunnen interacteren met driehoeken. De applicatie is sterk visueel, dynamisch en interactief en gericht op het ontwikkelen van inzicht in goniometrische problemen.

1.2 TABLETS EN GONIOMETRIE

Het gebruik van iPads op scholen wordt steeds populairder en er ontstaan steeds meer iPad scholen. In de praktijk blijkt dat de iPad op dit moment echter voornamelijk als digitaal boek wordt gebruikt, waarbij lesmethodes als pdf-files worden aangeboden. Er wordt nauwelijks gebruik gemaakt van de specifieke mogelijkheden die een tablet, zoals de touch bediening. Touch biedt mogelijkheden op het gebied van wiskunde, doordat formules en functies kunnen worden weergegeven als objecten die je kunt aanraken en manipuleren. Abstracte begrippen worden tastbaar en daardoor minder abstract. Omdat vooral het abstracte karakter van wiskunde voor veel leerlingen een struikelblok is (Zengin, Furkan, & Kutluca, 2012), kan wiskunde op deze manier begrijpelijker en inzichtelijker worden gemaakt. Succesvolle studenten maken vaak gebruik van visuele patronen bij het oplossen van wiskundeproblemen (Kellman et al., 2008). Volgens Ottmar, Landy, en Goldstone (2012) kunnen deze visuele patronen beter zichtbaar gemaakt worden door gebruik te maken van een tablet, doordat de bewegingen die leerlingen maken hen helpen dergelijk visuele patronen te identificeren.

Naast het abstracte karakter van wiskunde hebben veel leerlingen moeite met het leggen van verbanden tussen figuren en getallen (Blackett, 1991). Bij goniometrie moeten leerlingen een verband leggen tussen de grafische weergave van een driehoek en de corresponderende numerieke waardes. Veel leerlingen ontgaat dit verband en zien een berekening als de enige manier tot het verkrijgen van kennis over een driehoek. Software kan helpen om de kloof te overbruggen tussen deze twee representaties van een driehoek, door zichtbaar te maken hoe de figuur verandert als gevolg van veranderende numerieke waardes, en andersom. Naast het verband tussen figuur en getal focust deze dynamiek ook de aandacht op de relaties tussen de lengte van de zijden, de grootte van de hoeken en de goniometrische relaties. De sinus, cosinus en tangens zijn in feite verhoudingen en hangen dynamisch met elkaar samen. Interactieve omgevingen kunnen deze samenhang niet alleen visueel maken, maar leerlingen ook de mogelijkheid bieden deze zelf te verkennen door driehoeken te manipuleren en de uitwerking hiervan te observeren.

1.4 ONDERZOEKSVRAAG & HYPOTHESES

Ziggy bevat zowel uitleg als oefeningen gericht op het aanleren van basis goniometrie. Dit materiaal heeft betrekking op de stelling van Pythagoras, de 180° graden regel en de sinus, cosinus en tangens. Dynamische, interactieve driehoeken en touch bediening worden ingezet om het begrip van leerlingen te vergroten. Het doel van de applicatie is om leerlingen in staat te stellen tot het procedureel oplossen van goniometrische problemen en inzicht te verschaffen in de dynamische samenhang tussen zijden, hoeken en functies. Dit leidt tot de volgende onderzoeksvraag en hypothesen:

ONDERZOEKSVRAAG:

Leidt het gebruik van een interactieve, touch gestuurde applicatie er toe dat leerlingen zowel meer procedurele kennis als inzicht op gebied van goniometrie opdoen?

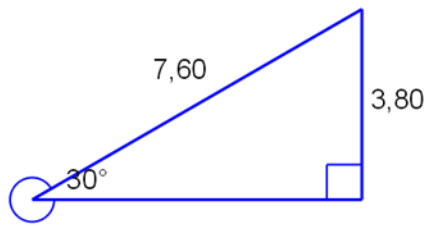
HYPOTHESES

- Leerlingen die met Ziggy werken doen meer procedurele kennis op over het oplossen van goniometrische problemen
- Leerlingen die met Ziggy werken verkrijgen meer inzicht in de basisgoniometrie

2. ZIGGY

2.1 ONTWERP

In figuur 2 wordt de interface van Ziggy gedemonstreerd. Aan de linkerkant van het scherm is een grafische representatie van een driehoek te zien. De rechterkant van het scherm wordt gebruikt voor de wiskundige vergelijking die hoort bij de driehoek aan de linkerkant. De precieze weergave van de driehoek hangt af van zijn functie. In figuur 2 wordt een uitlegpagina over de sinus getoond en de driehoek bevat alleen de informatie die relevant is; een rechte hoek, de waarde van de hoek waarvoor de sinus wordt berekend en de waarde van de overstaande en de schuine zijde. Andere gegevens zijn weggelaten om de leerlingen zo min mogelijk te verwarren. De formule rechts geeft aan dat de sinus wordt berekend door de overstaande zijde te delen door de schuine zijde. Eronder is te zien welke vergelijking ontstaat wanneer de waardes van deze driehoek worden ingevuld. De sinus heeft hier een waarde van 0,50.



$$\sin \angle = \frac{\text{overstaande zijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{3,80}{7,60} = 0,50$$

- De hoek in deze driehoek blijft altijd 30°.
- x Probeer deze driehoek eens groter of kleiner te maken.
- Wat gebeurt er met de zijden? En wat gebeurt er met de sin?

FIGUUR 2 UITLEGPAGINA SINUS

De cirkel om de linkerhoek geeft aan dat deze hoek versleepbaar is. Leerlingen kunnen deze hoek naar links of rechts slepen om de driehoek groter of kleiner te maken. Zowel de numerieke waardes die naast de zijdes worden weergegeven, als de waardes in de vergelijking aan de rechterkant veranderen dynamisch mee terwijl de leerling met de hoek sleept. In dit voorbeeld is de hoek vastgezet op 30°. Door het manipuleren van de driehoek ontdekt een leerling dat het verslepen van de hoek weliswaar de lengte van de zijden beïnvloedt, maar dat de sinus gelijk blijft. Op een volgende pagina van Ziggy wordt uitgelegd dat zolang de verhoudingen in de driehoek gelijk blijven de hoek, en de sinus van die hoek niet veranderen. In andere voorbeelden is de hoek niet vastgezet en kunnen leerlingen dus wel de verhoudingen in een driehoek veranderen.

Figuur 3 geeft een voorbeeld van een opgave. De opdracht is om de onbekende te berekenen, hoek A in dit geval. De leerling moet eerste de juiste regel kiezen door op één van de buttons in de rechterbovenhoek te tappen. Aangezien de overstaande en de schuine zijde van $\angle A$ bekend zijn, moet de sinus worden gebruikt. Er verschijnt een lege vergelijking die de leerling kan invullen door waardes uit de driehoek naar de stippellijnen te verslepen. Net als bij de uitleg is deze vergelijking interactief en veranderen de getallen in reactie op manipulaties van de driehoek. In figuur 2 zijn de hoek en overstaande zijde (4,26) ingevuld in de driehoek. Door ook de aanliggende zijde naar de juiste plaats in de vergelijking te slepen, onder de deelstreep, ontstaat een vergelijking die op te lossen is. De leerling kan vervolgens het antwoord berekenen.

FIGUUR 3 EENVOUDIGE OPGAVE

2.2 VERGELIJKINGEN OPLOSSEN

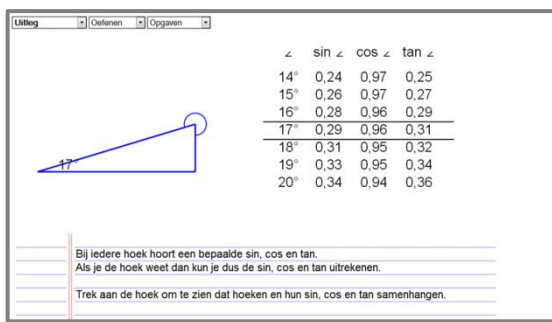
Om $\angle A$ in figuur 3 te berekenen, moet een vergelijking worden opgelost. Ziggy maakt gebruik van een methode gebaseerd op de 'pushing symbols' in Algebra Touch (Ottmar et al., 2012). Algebraïsche vergelijkingen worden opgelost door variabelen en waardes te herschikken volgens de regels van de wiskunde. Symbolen kunnen naar verschillende locaties worden verslept, waardoor de vergelijking een andere vorm aanneemt. Figuur 4 demonstreert deze manier van het oplossen van vergelijkingen. Leerlingen moeten de onbekende waarde a berekenen. Om dit te bereiken moet deze onbekende eerst worden geïsoleerd, door beide kanten in de vergelijking te vermenigvuldigen met 8,05. In Ziggy wordt dit bereikt door de noemer naar de andere kant van het = teken te slepen. Zodra de 8,05 het = teken passeert, verandert de deling in een vermenigvuldiging. Leerlingen zien de structuur van de vergelijking dynamisch veranderen terwijl ze symbolen heen en weer slepen. De vergelijking is nu zo geherstructureerd dat hij opgelost kan worden. Door op 'cos' te tappen wordt de cosinus van 37° berekend. Door vervolgens op het * teken te tappen worden de getallen links en rechts van dit teken vermenigvuldigd, waarna de waarde van a verschijnt.

$$\cos 37^\circ = \frac{a}{8.05} \quad \cos 37^\circ = \frac{a}{8.05} \quad \cos 37^\circ * \frac{8.05}{8.05} = a$$

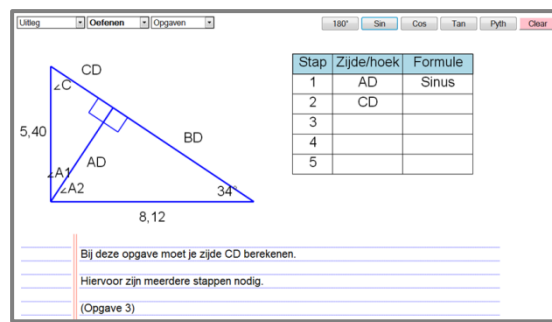
FIGUUR 4 OPLOSSEN VAN EEN VERGELIJKING

2.3 UITLEGPAGINA'S

Figuur 2 geeft een voorbeeld van een uitlegpagina. Ziggy bevat verschillende uitlegpagina's over de 180° graden regel, de stelling van Pythagoras en de goniometrische relaties. De pagina's geven een korte uitleg van de regel. De nadruk ligt op het feit dat sinus, cosinus en tangens verhoudingen zijn. Dit principe wordt gedemonstreerd door de leerlingen te laten werken met driehoeken waar in sommige gevallen slechts de grootte van de driehoek gemanipuleerd kan worden, terwijl in andere gevallen ook de verhoudingen kunnen worden aangepast. Figuur 5 is een voorbeeld van andere uitlegpagina's over de verhouding tussen hoek en de sinus, cosinus en tangens. Deze is toegevoegd om leerlingen te laten zien dat er een vaste waarde van sinus, cosinus en tangens is voor elke specifieke hoek.



FIGUUR 5 SAMENHANG TUSSEN HOEK EN SIN/COS/TAN



FIGUUR 6 STAPPENPLAN OPGAVE

2.4 OPGAVES

Ziggy bevat vier type opgaves. Twee type opgaves zijn vergelijkbaar met traditionele lesmateriaal. In Ziggy zijn deze dynamisch en interactief gemaakt. Daarnaast is er nog een tweetal opgaves ontwikkeld die niet zijn meegenomen in ons onderzoek (zie paragraaf 3). Deze inzichtsvragen en hypothese opdracht richten zich ophet verkennen van goniometrische situaties via een vorm van begeleid onderzoekend leren die op papier onmogelijk is. De ontwikkeling van deze opgaves was nog niet volledig afgerond ten tijde van het experiment en deze vormden dus geen onderdeel van het onderzoeksmateriaal.

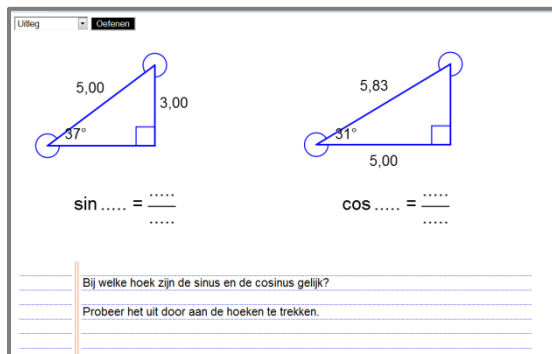
EENVOUDIGE OPGAVE

Figuur 3 is een voorbeeld van een eenvoudige opgave waarin een onbekende van een rechthoekige driehoek moet worden berekend op basis van twee gegeven hoeken of zijden. Deze driehoeken worden random gegenereerd waarbij de driehoek word geroeteerd. Doordat de schuine zijde zich steeds in een andere positie bevindt, oefenen leerlingen met het identificeren van de verschillende zijden, ook wanneer de driehoek niet 'rechttop' staat. Tijdens het oefenen wordt directe feedback

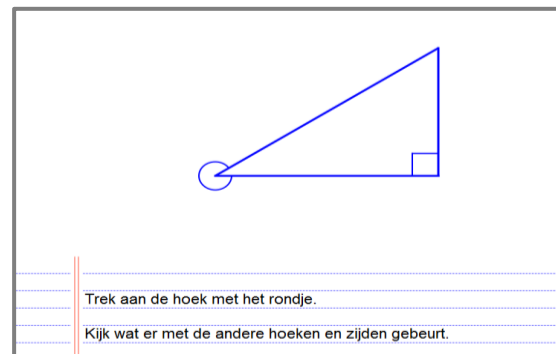
gegeven. Op het moment dat de verkeerde regel wordt geselecteerd of waarden naar verkeerde locaties in de vergelijking worden geslept (bijvoorbeeld de schuine zijde boven de deelstreep) wordt de actie geblokkeerd en verschijnt korte feedback waarom deze stap fout is. Tijdens deze oefeningen zijn de hoeken versleepbaar en kan zowel de grootte als de vorm van de driehoek worden gemanipuleerd.

STAPPENPLAN OPGAVE

In figuur 6 is een voorbeeld van een stappenplan opgave te zien. Deze opgaves bevatten samengestelde driehoeken waarbij een zijde of hoek moet worden berekend. Om deze onbekende te berekenen zijn één of meerdere tussenstappen nodig. Leerlingen moeten eerst het stappenplan invullen en vervolgens dit stappenplan vergelijken met het ideale stappenplan. Tenslotte berekenen leerlingen de onbekende via dit stappenplan.



FIGUUR 7 INZICHTSVRAAG



FIGUUR 8 HYPOTHESE OPGAVE

INZICHTSVRAAG

Deze opgaves zijn bedoeld om gevoel te creëren voor de grootte van de sinus, cosinus, tangens bij bepaalde hoeken. In de opdracht in figuur 7 moet de leerling eerst de formules voor de sinus en cosinus invullen om de waarden van beide te bepalen. Vervolgens kunnen de driehoeken zodanig worden verslept dat de sinus en cosinus aan elkaar gelijk zijn.

HYPOTHESE OPGAVE

Bij deze laatste variant (figuur 8) draait het om het opstellen van hypothesen. Leerlingen moeten een voorspelling doen over wat er met een bepaalde hoek, zijde of waarde gebeurt op het moment dat de aangegeven hoek naar links of rechts wordt verslept. Ze moeten aangeven of deze kleiner, groter of gelijk blijft. In deze variant wordt een vorm van onderzoekend leren toegepast waarbij leerlingen zelf het gevolg van manipulaties kunnen ontdekken.

3. ONDERZOEK

3.1 DEELNEMERS

In totaal hebben 28 middelbare scholieren uit twee klassen van de Waardenborch in Goor meegewerkt aan het onderzoek. De groep vwo leerlingen bestond uit 16 jongens en 12 meisjes uit twee verschillende klassen. Eén klas was een zogenoemde 'iPad klas' en was dus bekend met tablets, die zij in de klas hadden gebruikt sinds het begin van het schooljaar. Deze groep bestond uit 4 meisjes en 10 jongens en had een gemiddeld wiskundecijfer van 5,52 (SD 1,132). De andere klas van 8 meisjes en 6 jongens scoorde gemiddeld een 5,99 (SD 1,024) voor wiskunde.

3.2 PROCEDURE

Alle leerlingen volgden twee lessen van 50 minuten (zie figuur 9). Gedurende een derde lesuur van 50 minuten maakten ze de natoets (zie paragraaf 3.3). De iPad klas vormde de experimentele groep en werkte tijdens de lessen met Ziggy. De andere klas, de controlegroep, volgde vergelijkbare lessen waarbij geen gebruik werd gemaakt van de Ziggy applicatie.

De eerste les bestond uit herhaling van de stelling van Pythagoras, de 180° -regel en de tangens om deze stof kort op te halen. Vervolgens introduceerde de experimentleider de sinus en cosinus. De uitleg benadrukte in beide groepen de samenhang tussen hoek, zijde en goniometrische relaties. In beide groepen werden afbeeldingen van driehoeken gebruikt om de uitleg te ondersteunen, vergelijkbaar met figuur 2 en 5. In de controlegroep werden statische afbeelding weergegeven op een digitaal schoolbord. In de experimentele groep werden de afbeeldingen uit de uitlegpagina's van Ziggy gebruikt, die werden gepresenteerd op een groot scherm met behulp van de Apple TV. Tijdens de uitleg konden leerlingen op hun eigen tablet experimenteren met deze voorbeelden en zo actief meedoen. De uitleg werd gegeven volgens een vast protocol.

Na de uitleg werden drie eenvoudige voorbeeldopgaves gedemonstreerd, vergelijkbaar met de opgave in figuur 3. De experimentleider legde uit hoe je de juiste regel selecteert en hoe je vervolgens de vergelijking die je krijgt kunt oplossen. In de experimentele groep werd daarnaast gedemonstreerd hoe je dit in Ziggy doet met door 'pushing symbols'. Tijdens de resterende 25 minuten van de les gingen de leerlingen zelfstandig aan de slag met dit type eenvoudige opgaves. De Ziggy groep gebruikte interactieve en dynamische driehoeken, waarvan de vorm kon worden gemanipuleerd. De controlegroep maakte vergelijkbare opgaves op papier en gebruikte pen, papier en een rekenmachine om de opgaves op te lossen.

LES 1

EXPERIMENTELE GROEP		CONTROLE GROEP	
0 – 15 minuten	Kwartier uitleg volgens het protocol	0 – 15 minuten	Kwartier uitleg volgens het protocol
25 – 50 minuten	Oefenen met de eenvoudige procedurele opgaves.	15 – 50 minuten	Oefenen met de eenvoudige procedurele opgaves

LES 2

EXPERIMENTELE GROEP		CONTROLE GROEP	
0-5 minuten	Herhaling voorbeeldopgaves	0-5 minuten	Herhaling voorbeeldopgaves
5 – 15 minuten	Eenvoudige opgaves	5 – 15 minuten	Eenvoudige opgaves
15 -25 minuten	Uitleg stappenplan	15 -25 minuten	Uitleg stappenplan
25 - 50 minuten	Stappenplan opgaves oefenen	25 - 50 minuten	Stappenplan opgaves oefenen

FIGUUR 9 INDELING VAN DE LESSEN

De tweede les startte opnieuw met een korte introductie van de experimentleider. De drie voorbeeldopgaves werden nogmaals kort herhaald voor leerlingen die nog moeite hadden met de stof. In de experimentele groep werd daarnaast kort gedemonstreerd hoe men dergelijke opgave met een rekenmachine kon oplossen. Nadat de leerlingen nog eens 10 minuten kort geoefend hadden met deze opgaves, introduceerde de experimentleider de stappenplan opgaves. Ze demonstreerde een voorbeeldopgave op het digitale schoolbord. De resterende 20 minuten oefenden leerlingen met dit nieuwe type opgave. Uiteraard gebruikte de experimentele groep opnieuw Ziggy, terwijl de controle groep werkte met pen, papier en rekenmachine.

Leerlingen mochten tijdens de lessen niet samenwerken of overleggen. De experimentleider beantwoordde alleen technische vragen. Vragen in de controlegroep met betrekking tot de juistheid van de antwoorden werden beantwoord met ja of nee. Andere vragen werden niet beantwoord om de gelijke behandelingen van beide groepen te garanderen. Beide groepen hadden de gelegenheid om informatie op te zoeken over van het domein, die vergelijkbaar is met de introductie in les 1. De controlegroep ontving deze informatie op papier. De Ziggy groep kon deze informatie terugvinden in Ziggy. Door technische problemen konden de leerlingen slechts over deze informatie beschikken via een andere link in plaats van direct in Ziggy.

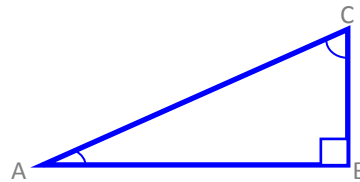
3.3 NATOETS

De natoets bestond uit twee delen. Het eerste deel bevatte 13 meerkeuze vragen gericht op het toetsen van inzicht. Er werd gekeken of leerlingen inzicht hadden in het effect van veranderingen in vorm en grootte van een driehoek op de sinus, cosinus en tangens. Daarnaast werd gekeken of leerlingen een globaal beeld hadden van de waarde die de tangens, sinus en cosinus kunnen aannemen. Hieronder staat een voorbeeld van een item uit het eerste deel van de toets. De leerlingen hadden 15 minuten de tijd en mochten daarbij geen gebruik maken van rekenmachine of andere materialen. Er konden 26 punten worden behaald.

Rechts zie je driehoek ABC. Ik maak zijde AB en zijde BC in driehoek ABC twee keer zo groot. $\angle B$ blijft 90° . Wat gebeurt er met zijde AC en met de hoeken? Kruis het goede antwoord aan.

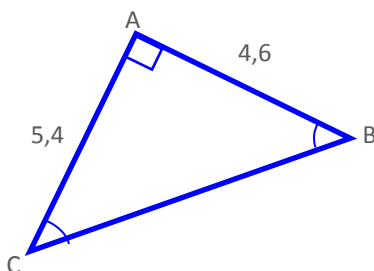
Wat gebeurt er met $\angle A$?

- a) $\angle A$ wordt precies 2 keer zo groot
- b) $\angle A$ blijft gelijk
- c) $\angle A$ wordt iets groter
- d) $\angle A$ wordt iets kleiner



Deel 2 van de natoets was gericht op het procedureel oplossen van goniometrische problemen en was vergelijkbaar met toetsen zoals die normaal worden gegeven in 3 vwo als afsluiting van het hoofdstuk goniometrie. Hieronder staat een voorbeeld item uit deel 2 van de toets.

Bereken zijde BC in twee decimalen. Schrijf je hele berekening op



Dit procedurele gedeelte van de toets bestond uit 14 vragen, waarvoor de leerlingen 35 minuten de tijd hadden. Alle leerlingen hadden beschikking over een rekenmachine, kladpapier en een A4 dat toelichtte hoe de rekenmachine gebruikt kan worden om de sinus van een hoek te berekenen. In totaal konden 26 punten worden behaald.

4. RESULTATEN

Tabel 1 laat zien dat leerlingen in beide groepen opvallend goed scoorden op de natoets. Dit geldt met name voor het procedurele gedeelte van de toets, waar de groepen gemiddeld respectievelijk 23,1 en 23,9 van de 26 punten scoorden. Een analyse door middel van een one-way Anova toont aan dat er een significant verschil bestaat tussen experimentele en controle groep $F(1,26) = 6,794$, $p = 0,015$. Het verschil op het procedurele gedeelte van de toets is niet significant, $F(1,26) = 0,452$, $p = 0,507$. Het significante verschil in totaalscores lijkt dan ook voornamelijk veroorzaakt te worden door het verschil op het inzicht gedeelte van de toets, $F(1,26) = 7,949$, $p = 0,009$. De gemiddelden in tabel 1 laten zien dat de controlegroep gemiddeld meer dan 3 punten hoger scoort dan de experimentele groep. De groep die niet met Ziggy heeft gewerkt presteert dus beter op inzicht.

TABEL 1 SCORES OP DE NATOETS

	EXPERIMENTEEL N = 14		CONTROLE N=14	
	Gem.	SD	Gem.	SD
Score inzicht	16,14	3,461	19,57	2,954
Score procedureel	23,07	3,496	23,86	2,627
Totaalscore	39,21	4,423	43,43	4,127

Maximale score inzicht & procedureel: 26

Maximale score totaal: 52

Om uit te sluiten dat dit verschil in inzicht veroorzaakt wordt door een verschil in wiskundenniveau tussen leerlingen uit beide groepen is het gemiddelde wiskundecijfer en het cijfer voor de vorige wiskundetoets op goniometrie meegenomen. In deze toets zijn de stelling van Pythagoras, de 180° regel en de tangens aan bod gekomen. Een univariate analyse met deze twee factoren als covariaat levert geen bewijs dat het verschil tussen de twee groepen wordt veroorzaakt door verschillen tussen de leerlingen. Het verschil tussen beide groepen neemt iets af, maar blijft significant: $F(1,24) = 5,944$, $p = 0,023$. Uit de analyse blijkt bovendien dat beide cijfers geen significante voorspellende waarde hebben voor het cijfer op het inzicht gedeelte van de natoets, $F(1,24) = 0,048$, $p = 0,947$ voor het wiskundecijfer en $F(1,24) = 0,837$, $p = 0,369$ voor het goniometrie cijfer. Een univariate analyse van de scores op het procedurele deel van de toets met het wiskundecijfer en het goniometrie cijfer als covariaat toont aan dat de voorspellende waarde van het goniometrie cijfer kleiner is voor dit gedeelte van de toets, $F(1,24) = 0,081$, $p = 0,778$. De voorspellende waarde van het wiskunde cijfer voor dit gedeelte van de toets is een stuk groter, maar net niet significant: $F(1,24) = 3,157$, $p = 0,088$.

5. CONCLUSIE EN DISCUSSIE

Op basis van de resultaten moeten we concluderen dat het gebruik van Ziggy niet heeft geleid tot betere resultaten op de natoets. Op het inzicht gedeelte van de toets deed de controle groep het zelfs iets beter. Gezien de geringe grootte van de steekproef en technische problemen tijdens het uitvoeren van het experiment, kan op basis van dit onderzoek niet worden geconcludeerd dat Ziggy niet werkt. Tijdens het experiment werden de opdracht pagina's in Ziggy via een andere URL gedraaid dan de uitlegpagina's. Dit betekende dat de uitleg tijdens het oefenen minder toegankelijk was voor de leerlingen in de experimentele groep. De controlegroep hadden wel directe beschikking over deze uitleg door middel van een A4 die ze naast hun opgaves konden inzien. Dit verschil in toegankelijkheid van uitleg heeft mogelijk een rol gespeeld bij de verkregen resultaten. Verder was er geen beschikking over een digitale toets voor de experimentele groep. Deze groep moest dus omschakelen van het gebruik van een tablet tijdens het oefenen, naar het rekenen met een rekenmachine, pen en papier tijdens de toets. Mogelijk hebben leerlingen moeite gehad met deze omschakeling.

Een aantal aanpassingen worden voorgesteld om de effectiviteit van Ziggy te vergroten. De applicatie is erop gericht om opgaves eenvoudig te maken en biedt dan ook veel ondersteuning, zoals directe feedback. Door deze feedback worden fouten onmiddellijk gecorrigeerd. Observaties van de experimentleider tijdens het experiment wijzen erop dat leerlingen te snel het idee hadden dat ze de stof beheersten. Daarnaast zorgt het oplossen van vergelijking via 'pushing symbols', er mogelijk voor dat de stof oppervlakkiger wordt verwerkt. Leerlingen hebben de neiging net zo lang te slepen tot een oplosbare vergelijking ontstaat en denken niet kritisch na. Beide vormen van ondersteuning zijn erg geschikt om de leerling op weg te helpen en om een gevoel te ontwikkelen voor goniometrie. Om het materiaal echt te leren beheersen moeten echter worden uitgedaagd tot actieve verwerking van de stof. Dat is op verschillende manieren te realiseren. De mate van ondersteuning kan worden afgebouwd naarmate de lessen vorderen en meer uitdagende opgaves kunnen worden toegevoegd. De hypothese opgave die we hebben beschreven in paragraaf 2.4 is een goed voorbeeld van een opgave die leerlingen stimuleert tot kritisch nadenken.

Een ander opvallend resultaat is de geringe voorspellende waardes van het gemiddelde wiskunde cijfer en het laatste goniometrie cijfer voor de score op de door ons ontwikkelde natoets. De voorspellende waarde van het gemiddelde wiskundecijfer is wel bijna significant ($p = 0,088$) voor het procedurele gedeelte van de toets. Aangezien dit gedeelte van de toets vergelijkbaar was met normale eindtoetsen op de middelbare school is dit een logisch resultaat. Dat deze voorspellende waarde zo klein is voor het inzicht gedeelte van de toets lijkt erop te wijzen dat hier daadwerkelijk

een andere vorm van kennis wordt getoetst. Blijkbaar is de score op deze procedureel gerichte kennistoetsen van weinig voorspellende waarde voor het inzicht dat we in dit deel van de toets hebben proberen te meten.

Observaties tijdens het experiment tonen aan dat leerlingen het werken met Ziggy in de klas heel erg waardeerden. Uit feedback van zowel docenten als leerlingen bleek dat bij veel leerlingen en leerkrachten de perceptie bestond dat Ziggy bijzonder effectief was in het kweken van begrip in goniometrie. Verder onderzoek moet uitwijzen de leerresultaten van Ziggy na een aantal aanpassingen vergroot kunnen worden tot een niveau dat overeenkomt met deze percepties.

6. REFERENTIES

- Blackett, N. T., D. (1991). *Gender and the versatile learning of trigonometry using computer software. Paper presented at the The international group for the psychology of mathematics education, Assisi, Italy.*
- Kellman, P. J., Massey, C., Roth, Z., Burke, T., Zucker, J., Saw, A., . . . Wise, J. A. (2008). *Perceptual learning and the technology of expertise: Studies in fraction learning and algebra. Pragmatics & Cognition, 16(2), 356-405.*
- Ottmar, E., Landy, D., & Goldstone, R. L. (2012). *Teaching the Perceptual Structure of Algebraic Expressions: Preliminary Findings from the Pushing Symbols Intervention.*
- Weber, K. (2005). *Students' understanding of trigonometric functions. Mathematics Education Research Journal, 17(3), 91-112.*
- Wilson, S. J. (2008). *Dynamic web tools for trigonometry. International Journal of Continuing Engineering Education and Life Long Learning, 18(5), 698-707.*
- Zengin, Y., Furkan, H., & Kutluca, T. (2012). *The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. Procedia - Social and Behavioral Sciences, 31(0), 183-187. doi: <http://dx.doi.org/10.1016/j.sbspro.2011.12.038>*

<http://ziggy.gw.utwente.nl/>