Sensible mathematics: een zoektocht aan de hand van lesson study

N.C. Verhoef, D. van Smaalen en J.M. Pieters

Universiteit Twente, Faculteit Gedragswetenschappen, Instituut ELAN

Juni 2012

Abstract

Deze studie gaat in op kenmerken van sensible mathematics - het gevoelig maken voor wiskundige begrippen en bewerkingen - in de context van het begrip afgeleide in 4vwo wiskunde B. Zes wiskundedocenten van verschillende scholen onderzochten samen hun lespraktijken aan de hand van lesson study. Concreet werden onderzoekslessen samen voorbereid, waarbij de uitvoering gezamenlijk werd geobserveerd. Op basis van discussie en reflectie werden de onderzoekslessen herzien en opnieuw uitgevoerd op een andere locatie. De resultaten van het onderzoek laten zien dat het gevoelig maken voor wiskunde begint met het activeren van het denken van leerlingen, inspelend op de intuïtie. Het gaat erom dat leerlingen gaan redeneren en communiceren in een eigen taal. Daarna ontstaat de fase waarin behoefte is aan visualisaties (iconen) om situaties te beschrijven die vervolgens overvloeien in getallen en bewerkingen daarmee (symbolen). In de fase waarin getallen een rol spelen is onderscheid gemaakt tussen het werken met getallen en het redeneren over de bewerkingen met getallen.

1. Inleiding en onderzoeksvraag

Aan de Universiteit Twente (UT) wordt in de volle breedte van de lerarenopleiding onderzoek gedaan naar het leren van docenten in leer- en kennisgemeenschappen. Recent onderzoek bevestigt dat samenwerking en actieve betrokkenheid het eigenaarschap van docenten voor vakvernieuwing bevordert (Buczynski & Hansen, 2010; Gersten, Dimino, Jayanthi, Kim, & Santoro, 2010; Levine & Marcus, 2010). De leergemeenschap die zich richt zich op het wiskundeonderwijs zoekt naar wegen om de aansluiting van het voortgezet naar het hoger onderwijs te optimaliseren. Zo is er in alle vernieuwingsvoorstellen een toenemende aandacht voor het correct kunnen uitvoeren van wiskundige technieken. Het gevaar dreigt dat daarmee de aandacht voor de betekenis van wiskundige begrippen en bewerkingen ondergesneeuwd raakt. In deze studie is gezocht naar ontwikkeling van zowel conceptuele kennis als flexibel gebruik van procedurele kennis (Rittle-Johnson, Star, & Durkin, 2009). Onderwijs dat hieraan voldoet is aangeduid met de term 'sensible mathematics' – een benadering die aansluit bij de voorkennis van leerlingen, een beroep doet op bestaande intuïtie en verankerd is in de wiskunde. Het zoeken naar kenmerken van sensible mathematics vond plaats in een leergemeenschap van docenten aan de hand van lesson study, het samen onderzoeken van lespraktijken. Lesson study is afkomstig uit Japan, waar het een rijke traditie heeft (Murata, 2011). Een eerste jaar van studie aan de UT naar de effecten van lesson study in de bovenbouw van het wiskundeonderwijs wees op de gevolgen van cultuurverschillen met Japan (Verhoef & Tall, 2011). In Europa en de VS gaan vernieuwingen in het onderwijs over verbeteringen van studieprestaties in plaats vernieuwingen van de onderwijsleerprocessen als geheel. Het gevolg daarvan is dat de nadruk ligt op het verbeteren van lesmaterialen om examenresultaten te verhogen (Hart, Alston, & Murata, 2011). Het tweede jaar van studie toonde de positieve effecten aan van ICT-gebruik. In dit paper gaan we in op de derde studie. Die studie had als doel het opstellen van kenmerken van *sensible mathematics* voor het wiskundige begrip afgeleide door een lesson study team bestaande uit zowel medewerkers van de UT als docenten van middelbare scholen. De onderzoeksvraag luidt: Welke zijn de kenmerken van sensible mathematics om het begrip afgeleide zowel procedureel als conceptueel te beheersen?

2. Theoretisch kader

2.1 Sensible mathematics, de ontwikkeling in het wiskundig denken

In deze studie wordt in de theorievorming over sensible mathematics aangesloten bij de drie door Bruner (1966) geïntroduceerde opeenvolgende stadia in de ontwikkeling van het denken. In een eerste stadium bestaan de representatietechnieken uit handelingen en spreekt Bruner van enactieve representatie. Door het doen van dingen en het manipuleren van objecten wordt inzicht en ruimtelijke bewustzijn opgebouwd. De effectiviteit van de enactieve representatietechnieken blijkt uit nieuwe handelingen die uitgevoerd kunnen worden. In een tweede stadium gaat het om het gebruik van voorstellingen in de vorm van herkenbare plaatjes (iconen). Iconische representatietechnieken leiden tot herkenning, vergelijking en contrast. In het derde stadium staat het gebruik van symbolen en abstracte redeneringen centraal. Symbolische representatietechnieken worden door Bruner gezien als het belangrijkste werktuig om kennis te ontwikkelen. Volgens Bruner worden de representatietechnieken continu en afwisselend gebruikt. Tall (2012) heeft deze ontwikkelingsgang in het denken uitgewerkt voor het wiskundig denken. Hij benadrukte het belang van activiteiten van leerlingen om het wiskundig denken te stimuleren. Binnen de activiteiten van leerlingen onderscheidde hij de fasen van waarneming, bewerking en redenering. Zo gaat hij uit van activiteiten die leerlingen aanzetten tot (gedachte)experimenten. Waarneming is de drijfveer die, gebaseerd op herkenning en ervaring, leidt tot de behoefte aan beschrijvingen over de handelingen aan de hand van visualisaties. Hij karakteriseert deze waarnemingsfase waarin enactieve en iconische representatietechnieken worden gebruikt als praktisch. De fase van waarneming wordt in de ogen van Tall gevolgd door een fase van bewerkingen met symbolen en het redeneren over die symbolen. Hij karakteriseert deze bewerkingsfase met definities en stellingen als theoretisch.

2.2 Aansluiting bij de niveautheorie van Van Hiele

Bij het zoeken naar kenmerken van sensible mathematics is in deze studie aangesloten bij de niveautheorie van Van Hiele (1984). Van Hiele onderscheidt in het meetkundig denken het waarnemingsniveau, het beschrijvende niveau en het formele niveau. Op het waarnemingsniveau gaat het bijvoorbeeld bij een cirkel om het manipuleren van meetkundige objecten (schotelrand, rand van een pupil etc.). Het daaropvolgende beschrijvende niveau is in dit voorbeeld te herkennen aan een rondje op het bord of op papier. Op het formele niveau gaat het dan om vergelijkingen zoals $x^2 + y^2 = r^2$. Een vergelijkbare ontwikkelgang is van toepassing geweest op sensible mathematics waar sprake is van waarnemen, beschrijven en formeel vastleggen met behulp van wiskundige begrippen en bewerkingen. Niveauverhoging in de zin Van Hiele sluit aan bij de ontwikkeling in de zin van sensible mathematics door het uitdagen van leerlingen om intuïtief te redeneren en te reflecteren op wat er gedaan is. Ervaringen met lesson study bevestigen dat uitdagende opdrachten, tegenvoorbeelden en andere aanpakken van medeleerlingen niveauverhogend werken (Becker, Ghenciu, Horak, & Schroeder, 2008).

2.3 Lesson study

Er is gekozen om het onderzoek naar *sensible mathematics* met betrekking tot de introductie het wiskundige begrip afgeleide in de context van lesson study te laten plaatsvinden. Bij lesson study ligt de nadruk op onderzoek naar leerprocessen van leerlingen in de lespraktijk. Een lesson study team bereidt gezamenlijk een onderzoeksles voor in het licht van een vooraf vastgesteld doel. Het doel kan variëren van motivatie van leerlingen tot het begrijpen van wiskundige begrippen. De activiteiten van het lesson study team hebben betrekking op het doel. De samen voorbereide onderzoeksles wordt op één van de locaties uitgevoerd, waarbij de rest van het lesson study team de lespraktijk observeert. Het doel is richtinggevend bij de observatie. De observaties worden direct na afloop van de les in aanwezigheid van de lesgever besproken op de locatie waar de les heeft plaatsgevonden. Op grond van discussies tijdens de nabespreking wordt de les bijgesteld. De bijgestelde les wordt op een andere locatie opnieuw gegeven, geobserveerd en nabesproken. In een plenaire bijeenkomst op universiteit wordt op de geobserveerde lessen teruggeblikt. De daaruit voortvloeiende discussie vormt de aanzet tot herziening en verfijning van theorievorming over sensible mathematics (Isoda & Tall, 2007; Isoda, 2011).

3. Methode

3.1 Deelnemers

De deelnemers aan het onderzoek (2011-2012) waren zes eerstegraads wiskundedocenten van verschillende scholen, waarvan twee docenten al twee jaar eerder en één docent een jaar eerder hadden geparticipeerd. Het lesson study team bestond daarnaast uit vier medewerkers van de UT die de noodzakelijke literatuur aanreikten en de dagelijkse leiding op zich namen. De docenten kregen jaarlijks een dagdeel van hun managers ter beschikking om deel te kunnen nemen aan lesson study.

3.2 Onderzoeksinstrumenten

De onderzoeksinstrumenten bestonden uit zes lesvoorbereidingen, field notes van de observaties van de leerlingen en verslagen van discussies op de locatie van de lesgever en reflecties in plenaire bijeenkomsten op de universiteit. De lesopdrachten en de observaties van de leerlingen dienden als input voor het blootleggen van het wiskundig denken van de leerlingen. De observanten waren collega's uit het lesson study team aangevuld met collega's van de eigen school. De verslagen van de discussies en de reflecties dienden als aanzet voor het zoeken naar kenmerken van sensible mathematics – het gevoelig maken voor wiskundige begrippen en bewerkingen.

3.3 Materiaal

Het materiaal is door het lesson study team ontwikkeld waarbij het reguliere schoolboek als uitgangspunt diende. Het onderwerp betrof de introductie van het begrip afgeleide in 4vwo wiskunde B (conceptuele kennis). In het schoolboek ligt de nadruk op rekenregels voor het differentiëren gebruikmakend van het begrip afgeleide (procedurele kennis). Het bijgestelde materiaal had als doel om conceptuele kennis en procedurele kennis over het begrip afgeleide naadloos in elkaar te laten overvloeien.

3.4 Context van de studie

Het doel van het lesson study team was om bij de introductie van het wiskundige begrip afgeleide het besef op te wekken dat de afgeleide een maat voor verandering is. Met GeoGebra kon dit proces van inzoomen goed zichtbaar worden gemaakt (Hohenwarter, Hohenwarter, Kreis, & Lavicza, 2008). De volgende fase in het verloop van de lessen kenmerkte zich door de visuele weergave van de afgeleide (conceptueel) als maat voor verandering. Hiervoor werd een icoon (als een pijltje in de vorm van een zwaluwstaart of als een lijnstukje zonder richting) ingezet. Het gebruik van een icoon diende als opstap voor de introductie (procedureel) van het werken met getallen (lokaal), waarna de rekenregels (globaal) over het differentiëren volgden. De lokale benadering ging over de afgeleide in een punt, de globale benadering betrof de afgeleide op een domein.

3.5 Procedure, dataverzameling, -verwerking, en -analyse

De docenten werkten in drie koppels (k1, k2 en k3) – in elk koppel zat een docent die nog niet eerder had meegedaan aan de lesson study. k1 startte met de uitvoering van de les 1, k2 voerde les 1 op dezelfde dag uit op een andere locatie. De volgende dag voerde k1 les 2 uit; k2 volgde met les 2 de daaropvolgende dag. De vier lessen werden samen voorbereid, geobserveerd en direct na afloop op de locatie nabesproken. Aan de hand van een reflectiebijeenkomst op de UT over de vier lessen samen werden de lessen bijgesteld. k3 gaf daarna les 1 en les 2. Deze lessen zijn direct na de uitvoering op de locatie nabesproken. In een bijeenkomst op de UT werd op alle lessen teruggeblikt met als doel kenmerken van sensible mathematics bloot te leggen.

De dataverzameling bestond uit drie series van elk twee lessen met lesvoorbereidingen, field notes van observaties van leerlingen, verslagen van discussies op de locatie en van de plenaire reflecties op de UT. De lesvoorbereidingen van het eerste koppel is kort samengevat. De lesuitvoeringen van de andere twee koppels zijn zichtbaar gemaakt aan de hand van verschillen met de eerste lesuitvoering. Per les zijn de field notes van de observaties van de leerlingen geclassificeerd in de door Tall (2012) onderscheiden fasen met betrekking tot activiteiten van leerlingen: waarneming, bewerking en redenering. Karakteristieke opmerkingen uit de verslagen van de discussies op de locatie en de plenaire reflecties op de UT zijn gemarkeerd en gecodeerd als praktisch (enactief, iconisch) en theoretisch (symbolisch) op basis van de door Bruner (1966) onderscheiden stadia in het denken. De analyse is gebaseerd op Tall’s (2012) theorie over de ontwikkeling in het wiskundig denken. De classificaties, de coderingen en de analyse zijn met de desbetreffende docenten besproken (member check).

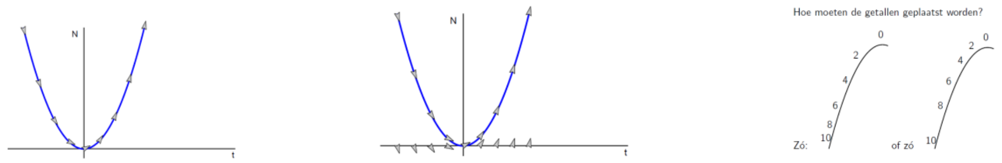
4. Resultaten

4.1 Lesvoorbereidingen

4.1.1 Lesvoorbereiding van het eerste koppel docenten

De resultaten van de lesvoorbereiding van de twee lessen van het eerste koppel zijn kort samengevat in Figuur 1.

In de eerste les introduceert de docent stijgen en dalen aan de hand van een verhaal over een springende kikker. Op de PPT-sheet staan de woorden: toenemend/afnemend; stijgen/dalen; richtingscoëfficiënt; helling. De leerlingen doen een opdracht met de ruggen tegen elkaar: de ene leerlingen omschrijft in eigen woorden het verloop van een grafiek, de andere leerling tekent dat verloop op papier.



De docent gaat plenair met de leerlingen aan de slag met pijltjes (de eerste twee figuren). De docent herinnert de leerlingen aan het spel Angry Birds om zo een gevoel te kweken voor het verloop van een grafiek in een punt. De docent laat de derde figuur zien en vraagt aan de leerlingen waar de getallen nu precies moeten staan?

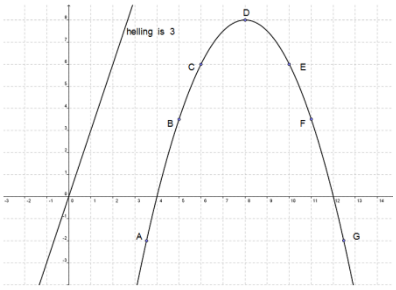
In de tweede les gaat de docent met de leerlingen door met getallen (richtingscoëfficiënten) die een richting voorstellen. Hij gebruikt op het bord hokjes en zet daar lijnstukjes in met een richting. De vraag is nu om richtingen te zoeken bij punten op de uitgedeelde grafiek van een bergparabool. De docent vervolgt plenair met het berekenen van de richtingscoëfficiënt van een lijn door twee punten die dicht bij elkaar op de grafiek liggen, suggererend dat dat de gevraagde richtingscoëfficiënt is.

Figuur 1

Lesvoorbereiding van het eerste koppel docenten

4.1.2 Lesvoorbereiding van het tweede koppel docenten

De tweede lesvoorbereiding van twee lessen kenmerkte zich door een sterke nadruk op het werken met symbolen. Het klassengesprek werd vervangen door werkbladen. In tweetallen werkten zij aan de opdrachten op de werkbladen. Het ging om het vinden van getallen als maat voor verandering. De kernopdracht betrof het bepalen van een helling in een punt (Figuur 2).



In welk punt van de grafiek is de helling 3? Laat zien wat je doet!

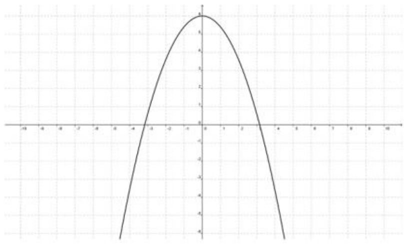
Figuur 2

Het bepalen van de helling in een punt van de grafiek bij het tweede koppel docenten

De opdracht om in eigen woorden het verloop van een grafiek te beschrijven diende nu als afsluiting aan het eind van de eerste les. Pijltjes werden niet gebruikt. In de tweede les benadrukte de docent plenair de lokale rechtheid in een punt van de grafiek van een bergparabool (vlakbij de top omdat dat het meest duidelijk was). Hij introduceerde dat als analogie met het kijken naar de aarde vanuit een ver ruimteschip. Vervolgens gebruikte de docent GeoGebra en liet zien dat de lijn door twee punten - die vlakbij elkaar liggen - hetzelfde resultaat gaf. Hij vervolgde met het vinden van de afgeleide in verschillende punten van de bergparabool en constateerde dat deze waarden op een rechte lijn liggen. Hij eindigde met het differentiequotiënt $\Delta y/\Delta x$ en de formule $(f(x+\Delta x)-f(x))/\Delta x$.

4.1.3 Lesvoorbereiding van het derde koppel docenten

In de derde lesvoorbereiding van twee lessen begon de eerste les met het in eigen woorden beschrijven van het verloop van een grafiek, gevolgd door een sheet met de bergparabool en pijltjes zoals in de eerste lesvoorbereiding (Figuur 1). De opdrachten op de werkbladen werden in koppels gemaakt. De nieuwe opdracht was om getallen te vinden op de plaats van de pijltjes. De les vervolgde met het vinden van een helling in een punt van de grafiek (Figuur 2). De les eindigde met het laten plaatsen van getallen bij de grafiek van de bergparabool, zie Figuur 3.



Zet de volgende hellinggetallen zo nauwkeurig mogelijk op de juiste plaats bij de grafiek: -4 , -2 , 0 , 2 en 4.

Figuur 3

Het plaatsen van getallen bij het derde koppel docenten

In de tweede les ging de docent in op lokale rechtheid door met GeoGebra in te zoomen in één punt van de grafiek. De docent introduceerde dat weer met de analogie van de blik van ver naar de aarde. De helling van de raaklijn was bepalend voor de verandering in dat punt van de grafiek. Hij eindigde met het differentiequotiënt en de formule voor de afgeleide om te kunnen differentiëren.

4.1.1. Samenvatting

Samengevat werd het gevoelig maken voor wiskunde gedurende het lesson study proces steeds meer verfijnd. De doelen waren steeds meer gericht op het inspelen op het intuïtief redeneren en op het gevoel voor verandering (conceptuele kennis) dan op het gebruik van regels om te differentiëren (procedurele kennis). Het houden van een klassengesprek (bij het eerste koppel docenten) bleek moeilijker dan vooraf werd aangenomen. De docenten introduceerden na de uitvoering van de lessen van koppel één, werkbladen om het denken van leerlingen bloot te leggen. De opdracht om in eigen woorden het verloop van een grafiek te beschrijven bleek na de uitvoering van de lessen van koppel twee toch aan het begin te moeten komen om het denken te kunnen stimuleren. Het gebruik van pijltjes (als icoon) werd steeds prominenter. De afsluiting liet zien dat er uiteindelijk naar het beheersen van het omgaan met technieken werd gestreefd.

4.2 Observaties van leerlingen

In Tabel 1 staan kenmerkende observaties wat betreft de leerlingen. In de eerste kolom staan de coderingen van de lessen per koppel. In de overige kolommen staan de classificaties waarneming, bewerking en redenering. In de cellen staan de gemarkeerde karakteristieken van de observaties per koppel, per les. De observatie van koppel drie werd voorafgegaan door een reflectieve plenaire bijeenkomst op de UT, in de tabel aangegeven met een stippellijn.

Tabel 1

Observaties van leerlingen in de lespraktijk

	waarnemen	bewerken	redeneren
K1-1	de woorden toenemend /afnemend; stijgen/dalen; richtingscoëfficiënt; helling stonden op het bord	leerlingen zijn geanimeerd bezig met het zetten van pijlen (zwaluwstaarten) op de grafiek	gaat het om de verhouding op het assenstelsel of hoe erg die stijgt? kan het tekenen van raaklijnen niet efficiënter?
K1-2	lijnstukjes in een hokje op het bord geven de richting aan: van beeld naar getal	papier omvouwen en ermee schuiven rekenen aan het differentiequotiënt	waarom zijn getallen belangrijk als je de richting kunt vouwen?
K2-1	niet	leerlingen gaan koorden tekenen, niet de raaklijn in een punt van de grafiek rekenend gaan proberen x- en y-coördinaten uitrekenen	niet
K2-2	inzoomen met GeoGebra, zien van lokale rechtheid koorde op klein interval, uitzoomen levert raaklijn	lijnen schuiven, schatten en berekenen rekenen aan differentiequotiënt	niet
K3-1	de woorden toenemend /afnemend; stijgen/dalen; richtingscoëfficiënt; helling worden vooraf gegeven	zelf schetsen op het werkblad schuiven van lijn met geo-driehoek koorden tekenen in plaats van raaklijn het woord raaklijn valt niet	bij een rechte lijn hebben de pijltjes steeds dezelfde richting hoe dichter de pijltjes bij elkaar hoe platter de grafiek wordt een pijltje op de x-as laat niet zien hoe hoog de grafiek ligt
K3-2	inzoomen met GeoGebra, zien van lokale rechtheid zien dat Δx kleiner wordt	kromme lijn recht maken lijnen schuiven, schatten en berekenen formule van rechte lijn opstellen	wat gebeurt er als A op B ligt? wat gebeurt er als Δx nul wordt? dy/dx is niet gedefinieerd, $dx=0$

Het aantal activiteiten van leerlingen nam toe gedurende de lesson study. Het intuïtief redeneren kwam steeds meer op de voorgrond te staan. Bij koppel één was er sprake van evenwicht in waarneming, bewerking en redenering. De leerlingen probeerden het icoon 'pijltje' (in de vorm van een zwaluwstaart) te verfijnen tot een lijnstukje dat in een hokje werd geplaatst. De leerlingen van koppel twee liepen tegen de blokkade op dat ze de in de natuurkundeles geleerde raaklijnmethode foutief gebruikten door met koorden aan de gang te gaan. Van waarnemen was weinig sprake, van redeneren was geen sprake. De leerlingen van koppel drie namen in les 2 een grote stap van het gebruik van pijltjes naar het gebruik van symbolen om uiteindelijk rekenregels te kunnen gebruiken om te differentiëren. De leerlingen gaven zelf betekenis aan het icoon 'pijltje'.

4.3 Discussies en reflecties

In Tabel 2 staan karakteristieke opmerkingen uit de discussies en de reflecties op basis van de observaties van de lessen. In de eerste kolom staan de coderingen van de lessen per koppel. In de overige kolommen staan de componenten in het wiskundig denken: praktisch (enactief en iconisch) en theoretisch (symbolisch, lokaal of globaal). In de cellen staan de gemarkeerde karakteristieken uit de verslagen per koppel, per les. De discussies en de reflecties van koppel drie werden voorafgegaan door een reflectieve plenaire bijeenkomst op de UT, in de tabel aangegeven met een stippellijn.

Tabel 2

Discussies en reflecties over lespraktijken

	praktisch		theoretisch	
	enactief	iconisch	symbolisch (lokaal)	symbolisch (globaal)
K1-1	de woorden toenemend /afnemend; stijgen/dalen; richtingscoëfficiënt; helling *niet* geven	pijl met richting verwijst naar een beweging, voorkeur 'pijl' zonder richting	leerlingen gaan van niet zonder meer met getallen aan de slag na het werken met pijlen	dit moet zich geleidelijk ontwikkelen
K1-2	max en min zijn niet het probleem, die gaan vanzelf	voorkeur lijnstuk met punt in het midden	bewust sturen naar het gebruik van getallen	ondersteunen met rekenen/differentiequotiënt
K2-1	botsing met natuurkunde: afgeleide betekent koorde	het gebruik van een icoon is nodig	context verschuiven naar assenstelsel	rekenen met differentiequotiënt
K2-2	misvatting dat het tekenen van koorde op klein interval bij uitzoomen raaklijn geeft	icoon nodig zonder richting aan te geven	vergelijking parabool en lijn geven en leerlingen zelf laten redeneren over de helling	rekenen met differentiequotiënt
K3-1	knippen, naaien zoals een naaimachine doet en vooral twee kanten benaderen	lijnstuk met punt in midden werkt het beste	voorkom blijven hangen in koorde, ga in assenstelsel met getallen verder	lokaal discontinu: koppel afnemend stijgend en toenemend dalend
K3-2	inzoomen op papier kan nu eenmaal niet rekenen met kleine Δx kost veel tijd!	niet	leerlingen denken dat een Δx van 0,001 exact is!	er is een gebrek aan rekenvaardigheden

De opdracht waarin de leerlingen gevraagd werd om het verloop van een grafiek in woorden te schetsen leek de leerlingen ervan bewust te maken dat het beschrijven van het verloop van grafieken geen sinecure is. De vervolgstap naar het gebruik van visualisaties om de situatie (het verloop) te kunnen beschrijven kon nu worden gemaakt. De woorden toenemend /afnemend, stijgen/dalen, richtingscoëfficiënt, en helling hadden vooraf niet gegeven moeten worden. Deze woorden hadden in een terugblik (direct na de opdracht) boven tafel moeten komen en als input kunnen dienen voor de vervolgstap: hoe kunnen we nu eenduidig en precies het verloop beschrijven? Er kwamen nieuwe ideeën op tafel over knippen en naaien zoals een naaimachine dat doet. Het icoon ontwikkelde zich gedurende lesson study van een pijl (zwaluwstaart) - beweging suggererend - naar een lijnstukje met een punt in het midden (iconisch). De overgang naar getallen, zowel lokaal als globaal, was een moeizame stap (theoretisch). Langzaamaan kwam het idee om een assenstelsel in te voeren om de overgang vloeiend te laten verlopen. Alleen in de eerste lessen van koppel één was nog sprake van een 'pijl' met een richting. De lessen van koppel twee verzandden in rekenwerk vanwege de blokkade uit de natuurkundeles. De misvatting dat het tekenen van een koorde bij uitzoomen de richting van de raaklijn geeft was hardnekkig. Het was de bedoeling om de leerlingen de vergelijking van de lijn $y=3x$ te geven en dan te laten redeneren over dezelfde helling in een punt van de grafiek (Figuur 2). In de lessen van koppel drie lag uiteindelijk de lat te hoog door een te snelle en onnodige introductie van Δx (symbolisch) om te kunnen gaan differentiëren. Wat betreft het de kracht van het inzoomen met GeoGebra werd gesteld dat het gaat om recht inzoomen zodat je de helling kunt berekenen. Dat zou je voor alle punten kunnen doen en door de computer laten uitvoeren. Zo ontstaat een globale beeld. Daarnaast zou met de leerlingen geredeneerd kunnen worden over de drie mogelijkheden om de helling op een interval te bepalen (eventueel eerst deze opdrachten over de klas verdelen):

I) Je neemt een interval rond het punt, dus [A-x, A+x]

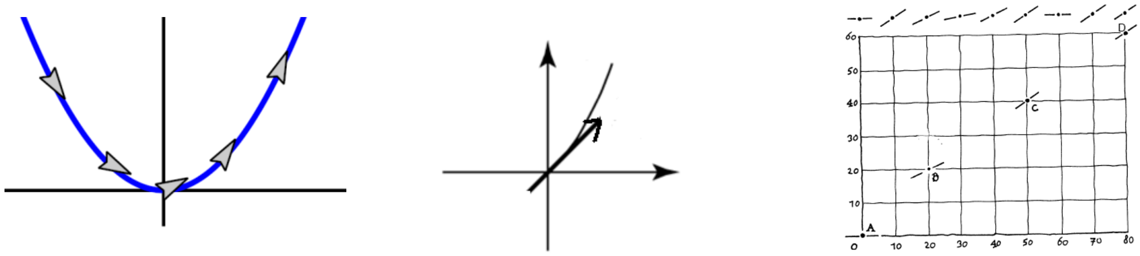
II) Je neemt het interval [A, A+x]

III) Je neemt het interval [A-x, A]

Vervolgens doorredeneren aan de hand van een duidelijke grafiek om te zien of deze benaderingen een te klein of te groot getal opleveren. Daarnaast werd het gebruik van tegenvoorbeelden genoemd zoals het verband met de grafiek van $y=|x|$.

5. Conclusies en discussie

Uit deze studie blijkt dat het gevoelig maken voor wiskundige begrippen en bewerkingen begint met het inspelen op de intuïtie en op het stimuleren van communicatie in eigen woorden (Broekman & Verhoef, 2012). De vervolgstap naar de behoefte om visualisaties te gebruiken om situaties te beschrijven in de vorm van iconen lijkt het wiskundig denken van leerlingen te stimuleren. Uit de studie blijkt ook dat de keuze van een icoon de stap naar het gebruik van getallen positief kan beïnvloeden als de keuze de vervolgstap naar het gebruik van symbolen minimaliseert. De beginsituatie was een zwaluwstaart als pijl die een richting aangeeft. De vorm van de zwaluwstaart, waarin een lijnstukje verstopt zit van de top naar het midden van de onderkant, kan aanleiding geven tot het idee dat het concept afgeleide onlosmakelijk verbonden is met een differentiequotiënt. Het differentiequotiënt geeft aanleiding tot het differentiaalquotiënt waarmee delen door nul als procedureel obstakel opduikt. Daarom is van een zwaluwstaart overgestapt op het gebruik van een pijltje in de vorm van een lijnstuk en v-tje aan de top. De vorm van deze pijl kan aanleiding geven om te veronderstellen dat er bij voortduring sprake is van beweging, omdat er een richting gegeven is. Daarom is uiteindelijk gekozen voor een lijnstukje met een punt in het midden, die geen beweging aangeeft nog verwijst naar een differentiequotiënt. De ontwikkeling is weergegeven in Figuur 4.



Figuur 4

Verschillende vormen van het gebruik 'pijltjes'

De ervaringen met de ontwikkeling van een icoon als kenmerkend zijnde voor sensible mathematics zijn gebaseerd op observaties van leerlingen in de context van lesson study. Aan de hand van lesson study kan direct worden ingespeeld op de lespraktijken. De discussies en de reflecties zijn bepalend geweest voor de ontwikkelgang in het wiskundig denken van leerlingen. De bijdrage van de UT-medewerkers aan het lesson study team spitst zich toe op het voortdurend aanreiken van nieuwe ideeën, en wegen om af te wijken van het gebaande lesboekenpad (Oshimaa, Horinoa, Oshimab, Yamamotoc, Inagakid, Takenakae, Yamaguchif, Murayamaa, & Nakayamaf, 2006). Uit de studie blijkt ook dat docenten ondanks de implementatie van een andere aanpak, uiteindelijk terugvallen op de methode die het lesboek voorstaat. Dit verklaart dat zelfs koppel drie in les twee toch nog probeert de regels voor het differentiëren de revue te laten passeren. Voor de UT-medewerkers zijn bij het aanreiken van ideeën voor uitdagende opdrachten good practices en de theorie van Tall (2012) een leidraad geweest. In het proces van lesson study leren de docenten bij het implementeren van nieuwe ideeën vooral van elkaar, met name van het nabespreken op de locatie van de lesgever. Het observeren in een andere omgeving ervaren zij eveneens als stimulerend en verrijkend. De reflectiebijeenkomsten zijn verdiepend geweest omdat er tijd verstreken is na de uitvoering, en meerdere uitvoeringen de revue passeerden als aanzet tot theorievorming.

Referenties

Becker, J., Ghenciu, P., Horak, M., & Schroeder, H. (2008). A college lesson study in calculus, preliminary report. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 39*(4), 491-503.

Broekman, H.G. B., & Verhoef, N.C. (2012). Een leven lang wiskundig denken: Pierre Marie van Hiele 4 mei 1909 - 1 november 2010. *Nieuw Archief voor Wiskunde, 13(*5), 121-124.

Bruner, J. S. (1966). *Towards a Theory of Instruction*. New York: Norton.

Buczynski, S., & Hansen, C. B. (2010). Impact of professional development on teacher practice: Uncovering connections. *Teaching and Teacher Education, 26,* 599-607.

Gersten, R., Dimino, J., Jayanthi, M., Kim, J.S., & Santoro, L.E. (2010). Impact of the Professional Development Model on Reading Instruction and Student Outcomes in First Grade Classrooms. *American Educational Research Journal, 47*(3), 694–739.

Hart, L.C., Alston, A., & Murata, A. (2011). *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education.* New York: Springer.

Hohenwarter, M., Hohenwarter, J., Kreis, Y., & Lavicza. Z. (2008). Teaching and learning calculus with free dynamic mathematics software GeoGebra. *TSG 16: Research and development in the teaching and learning of calculus, ICME 11,* Monterrey, Mexico.

Isoda, M., & Tall, D. O. (2007). *Long-term development of Mathematical Thinking and Lesson Study*. Prepared as a chapter for a forthcoming book on Lesson Study.

Isoda, M. (2010). Lesson Study: problem solving approaches in mathematics education as a Japanese Experience. *Procedia Social and Behavioral Sciences, 8,*17–27.

Levine, T. H., & Marcus, A. S. (2010). How the structure and focus of teachers' collaborative activities facilitate and constrain teacher learning. *Teaching and Teacher Education, 26*, 389-398.

Murata, M. (2010). Teacher learning with lesson study. In P. Peterson, E. Baker, & B. McGraw (Eds.). *International Encyclopedia of Education, 7,* 525 – 581. Oxford: Elsevier.

Murata , A. (2011). Introduction: Conceptual Overview of Lesson Study. In L.C. Hart, A. Alston, & A. Murata (Eds.), *Lesson Study Research and Practice in Mathematics Education* (pp. 269-279). New York: Springer.

Oshimaa, J., Horinoa, R., Oshimab, R., Yamamotoc, T., Inagakid, S., Takenakae, M., Yamaguchif, E., Murayamaa, I., & Nakayamaf, H. (2006). Changing Teachers' Epistemological Perspectives: A case study of teacher–researcher collaborative lesson studies in Japan. *Teaching Education, 17*(1), 43–57.

Rittle-Johnson, B., Star, J., & Durkin, K. (2009). The importance of prior knowledge when comparing examples: Influences on conceptual and procedural knowledge of equation solving. *Journal of Educational Psychology, 101*(4), 836-852.

Tall, D. O. (2008). The Transition to Formal Thinking in Mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5-24.

Tall, D.O. (2012). Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof. Plenary to be presented at *Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground: A Symposium in Honor of Ted Eisenberg, April 29-May 3, 2012, Ben-Gurion University of the Negev, Beer Sheva, Israel.*

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight*. Orlando: Academic Press.

Verhoef, N.C., & Tall, D.O. (2011). Teacher's professional development through lesson study: effects on mathematical knowledge for teaching. *Proceedings of the 35e Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ankara, Turkye.