

# Community of Learners (2): samen met vakcollega's op zoek naar een betere introductie van telproblemen

Geplaatst op 30 april 2014 door Mark Timmer.

**Sinds het schooljaar 2009-2010 wordt er op de Universiteit Twente in de vorm van een "Community of Learners" (CoL) gewerkt aan verbetering van het wiskundeonderwijs. Aan de hand van verscheidene praktijkonderzoeken is reeds duidelijk geworden dat we veel kunnen leren door gezamenlijk één of twee lessen heel goed voor te bereiden, live te observeren en vervolgens te evalueren.**

## Community of Learners

In een voorgaand artikel heb ik in hoofdlijnen uitgelegd hoe de CoL werkt. De belangrijkste richtlijn hierbij is het uit Japan afkomstige concept lesson study; we worden daarom ook wel een Lesson Study Team (LST) genoemd. Kort gezegd komt lesson study neer op het gezamenlijk voorbereiden van een lessenserie over een lastig onderwerp, gevolgd door een cyclisch proces van lesgeven, observeren, evalueren en bijstellen van die lessenserie. De nadruk ligt altijd op het leerproces van de leerlingen, niet op het functioneren van de docent.



Auteur Mark Timmer

In dit vervolgartikel geef ik een gedetailleerder kijkje in de keuken van het LST, door de verschillende stappen van het proces te bespreken aan de hand van een concreet voorbeeld. Deze lesson study heeft in de tweede helft van 2013 plaatsgevonden.

## Leerlingen zelf laten ontdekken

Stel, u heeft vijf verschillende boeken op een boekenplank staan. Op hoeveel manieren zijn die dan te ordenen? Een leerling die eindexamen vwo of havo doet met Wiskunde A in zijn of haar pakket, zal hopelijk weten dat het antwoord  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$  is. Dit is een typische som uit de combinatoriek, het wiskundige domein van de telproblemen.

De schoolboeken komen in deze context al snel op de proppen met faculteiten, permutaties en combinaties: concepten die stuk voor stuk redelijk eenvoudig toe te passen zijn en leerlingen helpen om een groot aantal telproblemen op te lossen. Het boek begint met het eerste concept en geeft hier een aantal opgaven over, vervolgt met het tweede concept en laat de leerling daarmee oefenen, enzovoorts. Iedere wiskundedocent zal echter de moeilijkheid herkennen die leerlingen ervaren als de sommen op het eind van het verhaal ineens door elkaar gehusseld worden. Velen zijn ineens volledig het overzicht kwijt en hebben geen idee welke techniek ze nu bij welke opgave moeten toepassen.

### Voorbeeld-opgave

*De parkeergarage onder het appartement van Klaas heeft vijf genummerde plaatsen: 1 2 3 4 5. Omdat het gebouw nog heel nieuw is, zijn niet alle appartementen verhuurd. Alleen Klaas, Leonard en Maurice wonen er op dit moment en kunnen daar hun eigen auto parkeren. Bijvoorbeeld kan Klaas zijn auto op plaats nummer 1 zetten, Leonard op nummer 2 en Maurice op nummer 4. Op hoeveel verschillende manieren kunnen Klaas, Leonard en Maurice hun auto parkeren?*

Het was aan het begin van dit schooljaar daarom al snel duidelijk waar onze lesson study over zou gaan: het meer inzichtelijk introduceren van dit soort telproblemen. Het liefst wilden we leerlingen hierbij zelf

de verschillen tussen de concepten laten ontdekken, zodat ze vervolgens beter voorbereid zijn op opgaven waarbij niet direct duidelijk is welke techniek van toepassing is.

## Vorbereitung: laat ze maar eens stoeien

Nadat het onderwerp was vastgelegd, zijn we begonnen met het bestuderen van een aantal wetenschappelijke artikelen over combinatoriekonderwijs. We vonden hierin onder andere de observatie dat combinatoriek gecompliceerd wordt door het gebrek aan heuristieken om een antwoord op juistheid te controleren. Ook werd genoemd dat leerlingen vaak niet precies door hebben hoe een situatie nu eigenlijk in elkaar steekt: kunnen objecten in een vraagstuk bijvoorbeeld meerdere keren gekozen worden, of tellen ze hoogstens eenmaal mee?

We concludeerden twee dingen:

- Ten eerste lijkt het essentieel dat leerlingen eerst maar eens gestructureerd leren tellen, voordat ze geavanceerdere telmethoden gaan toepassen.
- Ten tweede zouden ze zich moeten aanwennen om zich in te leven in de situatie waarin geteld wordt; wie kiest wat, en hoe gaat dat in z'n werk?

We besloten om leerlingen in de eerste les in het diepe te gooien, zonder eerst allerlei theorie uit te leggen. In groepjes van vier moesten ze drie vraagstukken naar keuze oplossen uit een stapel van dertien telproblemen. Daarna zouden ze de problemen moeten groeperen: opgaven moeten op dezelfde stapel terechtkomen als ze volgens de leerlingen eigenlijk hetzelfde telprobleem representeren (eventueel met andere voorwerpen en/of aantallen).

Bijvoorbeeld: het aantal manieren om vijf boeken op een boekenplank te ordenen ( $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ ) is wiskundig van precies dezelfde aard als het aantal manieren om drie personen op te delen in voorzitter, penningmeester en secretaris ( $3 \times 2 \times 1$ ). In beide gevallen wordt een aflopend rijtje getallen met elkaar vermenigvuldigd: een zogeheten faculteit, genoteerd als  $5!$  respectievelijk  $3!$ .

De tweede les zou met name besteed worden aan het bespreken van de oplossingen van de leerlingen. Ze lichten hun indeling toe en de rest van de klas stelt vragen. Vervolgens zouden ze een vergelijkbare opdracht krijgen: in plaats van het vinden van een categorie voor een opgave, moeten ter afsluiting nieuwe vraagstukken worden bedacht per categorie (die op gelijke wijze opgelost kunnen worden).

## Uitvoering en observaties: moeilijker dan gedacht!

We waren met name nieuwsgierig naar de wijze waarop leerlingen aan de slag gaan met een stel telproblemen waar ze nog geen uitleg over hebben gekregen. Zouden ze gestructureerd gaan uitschrijven of op zoek gaan naar slimme berekenmethodes? Proberen ze zich te overtuigen van de correctheid van hun oplossingen? Welke verschillen tussen de typen problemen kunnen ze uit zichzelf identificeren?

” *Tijdens de les bleek het voor de leerlingen maar wat lastig om überhaupt met de opgaven aan de slag te gaan.*

Een van de deelnemers van het LST voerde de les uit, terwijl de rest tussen de leerlingen zat en observeerde. Tijdens de les bleek het voor de leerlingen maar wat lastig om überhaupt met de opgaven aan de slag te gaan. Velen waren nog niet vaardig genoeg om zelf een oplosstrategie te bedenken. Ook het gestructureerd uitschrijven van alle mogelijkheden ging lang niet altijd van een leien dakje.

Op basis van deze observaties is direct besloten om het programma voor de tweede les om te gooien. In

plaats van de opzet die we in eerste instantie in gedachten hadden, begon de docent nu zelf die tweede les. Hij legde de klas een aantal keer een tweetal opgaven voor, waarvan in de eerste les was gebleken dat sommige groepjes ze als gelijk en andere groepjes ze als verschillend beschouwden.

De leerlingen werd gevraagd hun keuzes te motiveren. Hierbij werd uiteindelijk één van de twee belangrijkste aandachtspunten bij combinatoriek door een leerling opgemerkt (het al dan niet meer dan eens kunnen kiezen van een object in een telprobleem): mooi!

Op een gegeven moment kwam er een interessant tweetal opgaven aan de orde, die niet verschilden wat betreft het reeds door de leerlingen ontdekte aspect. Toen er nog geen overtuigende argumenten naar voren kwamen betreffende de overeenkomstigheid dan wel het onderscheid tussen deze nieuwe twee problemen, liet de docent de leerlingen de situaties fysiek naspelen. Hierbij ontdekte de klas al snel het tweede belangrijke aandachtspunt (het al dan niet van belang zijn van de volgorde van de te kiezen objecten).

## Verbetering: uitbeelden en sturing

Na afloop van de twee lessen concludeerden we aan de ene kant dat het uit het niets categoriseren nog te lastig is voor de leerlingen. Aan de andere kant hebben we ook geleerd dat het uitbeelden van de situaties een zeer positief effect heeft.

” *Tijdens deze lessen bleek dat leerlingen het best moeilijk vinden om zonder sturing van de docent een situatie uit te beelden*

Op basis hiervan is de les bijgesteld, waarbij de nadruk meer kwam te liggen op het inleven in de telproblemen. Een andere collega heeft deze verbeterde lessen vervolgens uitgevoerd, waarbij wederom werd geobserveerd door de rest van het lesson study team.

Tijdens deze lessen bleek dat leerlingen het best moeilijk vinden om zonder sturing van de docent een situatie uit te beelden; vaak storten ze zich nog steeds te snel op de concrete getallen waarmee gewerkt wordt, zonder eerst eens goed na te denken wie nou eigenlijk kiest en waar hij uit kan kiezen.

## Conclusie

We sloten de lesson study af met de conclusie dat leerlingen echt een beeld moeten krijgen van de telproblematiek, voordat er teruggegrepen wordt op de 'eenvoudige' faculteiten, permutaties en combinaties.

Visualisatie is belangrijk, maar zeker in het begin is enige sturing van de docent toch echt nog wel nodig. Zo heeft de lesson study iedere deelnemer behoorlijk aan het denken gezet, en zullen onze toekomstige lessen over combinatoriek meer gericht zijn op in- en uitbeelden dan op het aanleren van de standaardtrucjes!

Na deze keer een gedetailleerdere kijk te hebben gegeven op de uitvoering van een lesson study, zal ik in mijn volgende blog uitgebreider bespreken waar nu precies de leerpunten voor docenten zitten en hoe het proces bijdraagt aan hun professionele ontwikkeling.