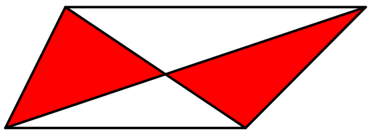
Opgaven bij "Analytische meetkunde in een nieuw jasje"

Opgave 1. *Gegeven de lijnen m en n met vectorvoorstellingen* $\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en

$\underline{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 16 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Bepaal de afstand tussen m en n.*

Opgave 2. *Bewijs dat de zwaartelijnen van een driehoek door 1 punt gaan en bewijs dat de zwaartelijnen elkaar in de verhouding 2 : 1 delen.*

Opgave 3 (Sangaku). *Formuleer en bewijs de stelling bij het volgende plaatje.*



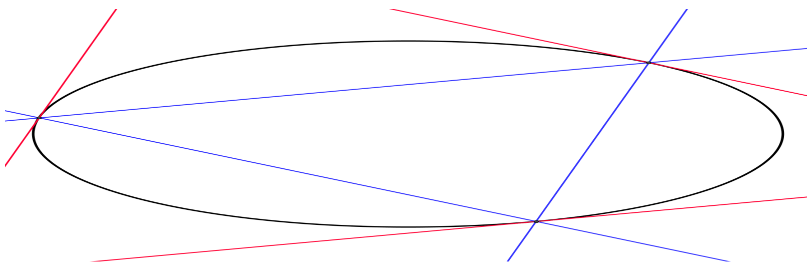
Opgave 4. *Bewijs dat de bissectrices van een driehoek door 1 punt gaan.*

Opgave 5. *Gelijke bissectrices in een driehoek impliceert gelijkbenigheid.*

Opgave 6. *Het grondoppervlak van een regelmatig viervlak ABCD heeft hoekpunten A = (0, 0, 0), (2, 0, 0) en C = (1, √3, 0). Bepaal de mogelijke punten D.*

Opgave 7: *De verticale muur M wordt begrensd door lijnstukken tussen A = (2, 1, 0) en B = (2, 1, 2); B en C = (−2, 1, 2); C en D = (−2, 1, 0); D en A. De zon valt in volgens de richting (0, 1, −1). Bepaal de schaduw van de muur.*

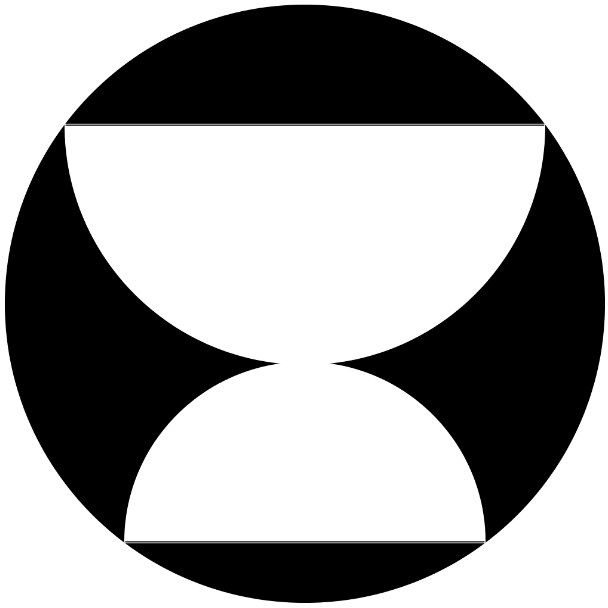
Opgave 8 (Sangaku). *Formuleer en bewijs de stelling.*



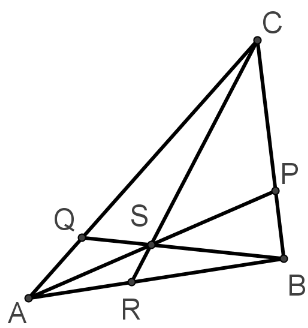
Opgave 9. *Bepaal de afstand van de cirkel C:* $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ *tot de lijn l :* $3x + 4y = 27$.

Opgave 10. *Gegeven 2 verschillende punten A en B in* $\mathbf{R}^2$. *Bewijs dat de verzameling punten P waarvoor |AP| = |BP| de middelloodlijn van A en B is. Generaliseer naar* $\mathbf{R}^3$.

Opgave 11 (Sangaku). *Formuleer en bewijs de stelling*



Opgave 12 (Ceva). Bewijs dat AP, BQ en CR precies dan door 1 punt gaan wanneer $AR \cdot BP \cdot CQ = RB \cdot PC \cdot QA$.



Oplossing opgave 1. Bijvoorbeeld: verschilvector $\begin{pmatrix}6\\7\\16\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}8\\0\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}4\\1\\-1\end{pmatrix}$ heeft inproduct 0 met de twee richtingsvectoren. Twee vergelijkingen met oplossing $(\lambda, \mu) = (-3, -2)$. Dus verschilvector is $(2, 8, 16)^T$ en de afstand is 18.

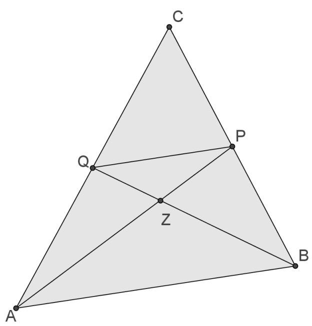
Alternatieve oplossing opgave 1: Het kwadraat van de lengte van de verschilvector is $(6 + 8\mu - 4\lambda)^2 + (5 - \lambda)^2 + (17 - \mu + \lambda)^2 = 350 + 62\mu - 24\lambda + 65\mu^2 - 66\lambda\mu + 18\lambda^2$ (partieel) differentiëren naar λ en μ en (partiële) afgeleiden nul stellen: $-24 - 66\mu + 36\lambda = 62 + 130\mu - 66\lambda = 0$. Je vindt weer $(\lambda, \mu) = (-3, -2)$, etcetera. Merk op dat het voldoende en gemakkelijker is om het kwadraat van de lengte te differentiëren!

Nog een alternatief: Neem gemeenschappelijke normaalvector (bijvoorbeeld via uitproduct of door inproducten nul te stellen) $\boldsymbol{n} = (1, 4, 8)$. Neem vlak met normaal $\boldsymbol{n}$ door lijn n: $x + 4y + 8z = 162$. De afstand tussen m en n is de afstand tussen m en dit vlak.

Oplossing opgave 2. Opmerking vooraf: Als P en Q plaatsvectoren $\boldsymbol{p}$ en $\boldsymbol{q}$ hebben, dan hebben punten op de lijn door P en Q plaatsvectoren van de vorm $\boldsymbol{q} + \lambda(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{q}) = \lambda\boldsymbol{p} + (1 - \lambda)\boldsymbol{q}$. Zo'n punt R ligt precies dan tussen P en Q wanneer $0 < \lambda < 1$. Verder geldt $PR : RQ = (1 - \lambda) : \lambda$.

Noem de plaatsvectoren van de hoekpunten $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$. De plaatsvector van het middelpunt van de zijde BC is $\tfrac{1}{2}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Punten op de zwaartelijn door A hebben dus de plaatsvector $\lambda\boldsymbol{a} + \tfrac{1}{2}(1 - \lambda)(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Briljant idee: voor $\lambda = \frac{1}{3}$ vind je $\frac{1}{3}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})$. Het punt Z met die plaatsvector ligt dus op de zwaartelijn door A. Hetzelfde argument met A en B (respectievelijk A en C) verwisseld laat zien dat Z op de zwaartelijn door B (respectievelijk C) ligt. Dus Z ligt op de drie zwaartelijnen en de zwaartelijnen delen elkaar volgens de verhouding 2 : 1.

Alternatieve oplossing opgave 2. Laten P en Q de middelpunten van BC respectievelijk AC zijn. Laat Z het snijpunt zijn van AP en BQ.



De driehoeken ACB en QCP zijn gelijkvormig (zhz) en de schaalfactor is 2. Het lijnstuk AB is dus evenwijdig aan en 2 keer zo lang als het lijnstuk PQ. Dus zijn de driehoeken AZB en PZQ gelijkvormig (hhh) met schaalfactor 2. We concluderen dat de zwaartelijn uit B de zwaartelijn uit A snijdt in het punt Z dat gekarakteriseerd wordt door $AZ : ZP = 2 : 1$. Hetzelfde argument met verwisselde rollen voor B en C laat zien dat de zwaartelijn uit C de zwaartelijn uit A in hetzelfde punt Z snijdt. De drie zwaartelijnen gaan dus door het punt Z en de zwaartelijnen snijden elkaar in de verhouding 2 : 1.

Oplossing opgave 3. Stelling: *Zij ABCD een trapezium met parallelle zijden AB en CD. Zij S het snijpunt van de diagonalen. Dan hebben de driehoeken ASD en BSC dezelfde oppervlakte.*

Bewijs (schets): We mogen aannemen dat *A, B, D* en *C* plaatsvectoren $\mathbf{0}$, $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, en $\mathbf{q} + \lambda\mathbf{p}$ hebben. Bereken nu de plaatsvector van het snijpunt van de diagonalen. Je vindt $(\mathbf{q} + \lambda\mathbf{p}) / (1 + \lambda)$. De driehoek *ASD* wordt opgespannen door de vectoren $\mathbf{q}$ en $(\mathbf{q} + \lambda\mathbf{p}) / (1 + \lambda)$. De oppervlakte is de helft van de absolute waarde de lengte van het uitproduct $\mathbf{q} \times (\mathbf{q} + \lambda\mathbf{p}) / (1 + \lambda) = \lambda\, \mathbf{q} \times \mathbf{p} / (1 + \lambda)$. Analoog kun je de oppervlakte van de driehoek *BSC* uitrekenen. Je vindt hetzelfde resultaat.

Alternatief bewijs (schets): We mogen aannemen dat $A = (0,0)$, $B = (1,0)$. Volgens het principe van Cavalieri (zie wikipedia)

mogen we bovendien aannemen dat $D = (0, d)$. Compressie/strekking van de y-coordinaat met een factor d comprimeert/strekt alle oppervlakten met dezelfde factor d. We mogen dus aannemen dat $d = 1$. Neem nu $C = (p, q)$ en ga rekenen…

Eenvoudigste bewijs: De driehoeken *ABC* en *ABD* hebben dezelfde basis en dezelfde hoogte, dus dezelfde oppervlakte. Trek hiervan af de oppervlakte van *ASB* en je houdt de gewenste gelijkheid over.

Oplossing opgave 4. Synthetisch triviaal (bissectrice is conflictlijn van zijden), maar analytisch?

Oplossing opgave 5. Dit is het beruchte Steiner-Lehmus- probleem (zie wikipedia). U bent een held als u het oplost.

Oplossing opgave 6: De loodlijn door D op het vlak $z = 0$ gaat door het zwaartepunt $Z = (1, \sqrt{(1/3)}, 0)$ van de driehoek *ABC*. Zij h de hoogte van D t.o.v. $z = 0$. Dan geldt $4 = AD^2 = AZ^2 + h^2 = 1 + (1/3) + h^2$, dus $h = \sqrt{(8/3)}$ en $D = (1, \sqrt{(1/3)}, \pm\sqrt{(8/3)})$.

Oplossing opgave 7: Vraag Hans Sterk.

Oplossing opgave 8: Stelling: *Gegeven 3 verschillende punten A, B en C op een ellips e. Als de raaklijn aan e in A evenwijdig is aan BC en de raaklijn aan e in B is evenwijdig aan AC, dan is de raaklijn aan e in C evenwijdig aan AB.*

Bewijs: We mogen aannemen dat de ellips gegeven wordt door de vergelijking $(x/a)^2 + (x/b)^2 = 1$ met $a, b > 0$. We parametriseren de ellips door $(x, y) = (a\cos(t), b\sin(t))$. Laat A, B en C corresponderen met $t = \alpha$, β respectievelijk γ. De raaklijn aan e in A heeft richtingsvector $(-a\sin(\alpha), b\cos(\alpha))$. Een normaalvector voor deze raaklijn is dus $\boldsymbol{n} = (b\cos(\alpha), a\sin(\alpha))$. De verbindingslijn BC heeft richtingsvector $\boldsymbol{v} = (a\cos(\gamma) - a\cos(\beta), b\sin(\gamma) - b\sin(\beta))$. De voorwaarde dat de raaklijn aan e in A parallel is aan de lijn BC is dus equivalent met het verdwijnen van het inproduct, dus met

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = ab\cos(\alpha)(\cos(\gamma) - \cos(\beta)) + ab\sin(\alpha)(\sin(\gamma) - \sin(\beta)) = 0.$$

We zien dat de parameters a en b er niet toe doen! We nemen dus zonder beperking der algemeenheid aan dat $a = b = 1$. Blijkbaar volgt de stelling voor de ellips uit het speciale geval van cirkels. (Voor de kenners: het is een affien probleem.) Maar nu we op de cirkel zijn, mogen we ook aannemen dat $\alpha = 0$, d.w.z. $A = (1, 0)$. De raaklijn in A is dan verticaal en hetzelfde geldt dus voor de lijn BC, dus $B = (\cos(\beta), \sin(\beta))$ en $C = (\cos(\beta), -\sin(\beta))$. Nu geldt:

raaklijn in B parallel aan AC

$\Leftrightarrow \cos(\beta)(\cos(\beta) - 1) - \sin(\beta)\sin(\beta) = 0$

$\Leftrightarrow$ raaklijn in C parallel aan AB

Hiermee is de stelling bewezen.

Oplossing opgave 9. *Bepaal de afstand van de cirkel C: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ tot de lijn l : $3x + 4y = 27$.*

Bepaal het voetpunt V van de loodlijn door het middelpunt $M = (2,-1)$ van de cirkel op de lijn l. Die loodlijn heeft richtingsvector $(3, 4)^T$, dus het voetpunt is van de vorm $(2 + 3p, -1 + 4p)$. Invullen in de lijn geeft $6 + 9p - 4 + 16p = 27$, dus $p = 1$ en $V = (5, 3)$. De afstand van M tot de lijn l is dus 5 en de afstand van de cirkel tot de lijn is $5 - \sqrt{9} = 2$.

Alternatieve oplossing: Parametriseer de cirkel als $(x, y) = (2 + 3\cos(t), -1 + 3\sin(t))$. De afstand van dit punt tot de lijn l is gelijk aan de absolute waarde van $3(2 + 3\cos(t)) + 4(-1 + 3\sin(t)) - 27 = 9\cos(t) + 12\sin(t) - 25$ gedeeld door de lengte van de normaalvector $(3, 4)^T$, dus die afstand is

$$5 - (9/5)\cos(t) - (12/5)\sin(t).$$

Het minimum van deze functie kun je bijvoorbeeld bepalen met analyse. (Of je schrijft $(9/5, 12/5) = A(\cos(\varphi), \sin(\varphi))$ voor $A = \sqrt{(9/5)^2 + (12/5)^2} = 3$ en een geschikte, maar onbelangrijke hoek φ. Dus $(9/5)\cos(t) + (12/5)\sin(t) = A\cos(\varphi)\cos(t) + A\sin(\varphi)\sin(t) = A\cos(\varphi - t)$ heeft maximum 3.) De afstand tussen de cirkel en de lijn is dus $5 - 3 = 2$.

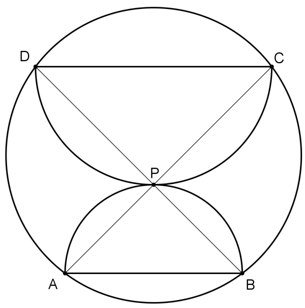
Oplossing opgave 10.

Synthetisch bewijs: Neem aan dat *P* op de middelloodlijn van *AB* ligt. Zij *M* het midden van *AB*. Dan zijn de driehoeken *AMP* en *BMP* congruent (ZHZ), dus $|AP| = |BP|$. Omgekeerd, als $|AP| = |BP|$, dan zijn de driehoeken *AMP* en *BMP* congruent volgens ZZZ. Dus de hoeken *AMP* en *BMP* zijn congruent en dus recht. Dus *P* ligt op de middelloodlijn. (Voor de preciezen: eigenlijk moet het geval $P = M$ apart worden behandeld…)

Analytisch bewijs: We mogen aannemen dat $A = (0, 0)$ en $B = (p, q)$. Schrijf $P = (x, y)$. Er geldt $|AP| = |BP| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = (x - p)^2 + (y - q)^2 \Leftrightarrow 2px + 2qy = p^2 + q^2$. Dit is de vergelijking van een lijn door $M = ½ (p, q)$ loodrecht op de verbindingsvector $AB = (p, q)^T$, kortom, dit is de middelloodlijn.

Oplossing opgave 11. Stelling: *Gegeven een cirkel en een ingeschreven bokaal.(Een bokaal bestaat uit twee rakende halve cirkelschijven met parallelle "bases".) De oppervlakte van de bokaal is de helft van de oppervlakte van de cirkelschijf.*

Synthetisch (?) bewijs: We noemen de hoekpunten van de bokaal tegen de klok in *A, B, C, D* en wel zo dat de bases *AB* en *CD* zijn. We noemen het raakpunt van de halve cirkelschijven *P*.



Vanwege de symmetrie ligt *P* halverwege de cirkelbogen *AB* en *CD*. De driehoeken *APB* en *CPD* zijn dus geodriehoeken (rechthoekige gelijkbenige driehoeken).

Beweeg *A* en *B* naar elkaar toe. Als *AB* kleiner wordt, wordt *CD* groter. In de limiet $A = B$ is *CD* een diameter van de cirkel. De bokaal bestaat dan uit de halve cirkelschijf. De stelling is dus equivalent met de volgende uitspraak:

> *De oppervlakte van de bokaal hangt alleen van de grootte van de omschreven cirkel af, niet van de lengte van de koorde AB.*

De oppervlaktes van de halve cirkelschijven zijn evenredig met AB^2 en CD^2. De stelling is dus equivalent met de volgende uitspraak:

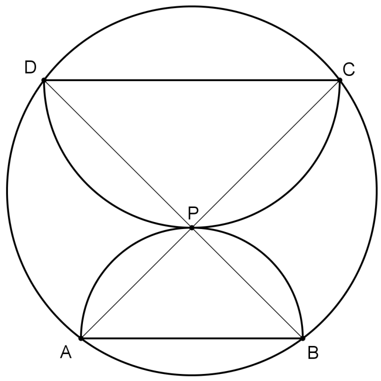
> $AB^2 + CD^2$ *hangt alleen van de grootte van de cirkel af.*

We weten al dat de hoek *APB* recht is. De laatste uitspraak is dus equivalent met de volgende uitspraak:

> AD^2 *hangt alleen van de grootte van de cirkel af.*

We schrijven *M* voor het middelpunt van de cirkel. Volgens de stelling van de middelpunts- en omtrekshoek is de hoek *AMD* twee keer zo groot als de hoek *ACD*. De middelpuntshoek *AMD* is dus recht. Hieruit volgt dat *AD* gelijk is aan √2 maal de straal van de cirkel. Hiermee is de stelling bewezen. **Q.E.D.**

Analytisch bewijs: We noemen de hoekpunten van de bokaal tegen de klok in *A, B, C, D* en wel zo dat de bases *AB* en *CD* zijn. We noemen het raakpunt van de halve cirkelschijven *P*.



Vanwege de symmetrie ligt *P* halverwege de cirkelbogen *AB* en *CD*. De driehoeken *APB* en *CPD* zijn dus geodriehoeken (rechthoekige gelijkbenige driehoeken). We mogen aannemen dat de cirkel de eenheidscirkel is en dat *AB* en *CD* horizontaal zijn. Als $C = (x, y)$ dan is dus $D = (-x, y)$. De vector die van $(-y, -x)$ naar *C* wijst is $(x + y, x + y)^T$. Deze vector maakt een hoek van 45° met *AB*. Omdat bovendien $(-y, -x)$ op de eenheidscirkel ligt, concluderen we dat $A = (-y, -x)$. Analoog vind je $B = (y, -x)$.

De diameters van de halve cirkelschijven van de bokaal zijn dus $|AB| = 2y$ en $|CD| = 2x$. De oppervlakte van de bokaal is dus $\frac{1}{2}\pi(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\pi$, de helft van de oppervlakte van de cirkelschijf.

Q.E.D.

Oplossing opgave 12. Synthetisch bewijs. Neem aan dat de drie lijnen *AP*, *BQ* en *CR* snijden in *S*. Er geldt $|AR| : |RB| = |ACR| : |RCB|$, waarbij $|XYZ|$ de oppervlakte van de driehoek *XYZ* is. Verder geldt $|AR| : |RB| = |ASR| : |RSB|$. Dus geldt $|AR| : |RB| = |ASC| : |BSC|$. Analoog bewijs je $|BP| : |PC| = |BSA| : |CSA|$ en $|CQ| : |QA| = |CSB| : |ASB|$. De stelling volgt onmiddellijk.

Analytisch bewijs. Als je niet slim te werk gaat, wordt dit een akelige rekenpartij.