Boekbesprekingen

Book Reviews

Paul Drijvers (red.)

Wat a is, dat kun je niet weten: Een pleidooi voor betekenisvolle algebra op school

Utrecht : Freudenthal Instituut, Universiteit Utrecht, 2006
199 p., prijs € 15,00
ISBN 90-70786-00-1

De titel van dit boek *Wat a is, dat kun je niet weten* , een verzameling artikelen onder redactie van Paul Drijvers, lijkt de lezer te willen verleiden een formule op te lossen en hierdoor algebra te bedrijven. Op de achterflap staat te lezen dat dit boek gaat over betekenisvolle algebra op school, waarmee bedoeld wordt dat algebraïsche vaardigheden in contexten hun betekenis krijgen. De betekenis van algebra als zijnde nuttig en zinvol voor de vorming van abstractie in wiskundige context, is niet het pleidooi dat Drijvers wil ontlokken — hoewel hiervoor voldoende aanknopingspunten in het boek te vinden zijn.

De opbouw van het boek is van 'laag naar hoog'. Dat wil zeggen dat het boek begint met rekenen in het primair onderwijs — via algebra in het vmbo, de onderbouw en de tweede fase van havo en vwo, het profiel natuur en techniek — en eindigt in een visie op schoolalgebra als onderdeel van de schoolwiskunde. Alle auteurs werken op het *Freudenthal Instituut*, dat zich vanaf zijn oprichting gespecialiseerd heeft in de ontwikkeling van realistisch wiskundeonderwijs. In het Nederlandse primair onderwijs is deze realistische benadering inmiddels in brede zin geaccepteerd. In de bovenbouw van het voortgezet onderwijs daarentegen, stapelen de problemen zich op. Het hoger onderwijs constateert een ernstig tekort aan algebraïsche vaardigheden. Deze publicatie speelt daarop in door een discussie op gang te willen brengen over betekenisvolle schoolalgebra. In hoofdstuk 4, dat algebra in de onderbouw van havo en vwo beschrijft, vergelijkt Paul Drijvers voorbeelden uit veel gebruikte schoolmethodes van 1955, 1969 en 2003. Opvallend is, dat hij verdedigt waarom het algebraonderwijs anno 2003 is wat het is. Hij ondersteunt dat met een voorbeeld uit Getal en ruimte 1 havo/vwo (2003). Het gaat over mevrouw Slim die in haar tuin een diepe put (het water is onder in de put warmer dan boven in de put) wil, zodat ze onderin water kan koken. "Meneer Slim is tot vele dingen bereid. Toch wil hij zo'n put niet voor zijn vrouw graven. Waarom denk je?" (p. 56). De vraag is of het hier wel om een betekenisvolle context gaat. Het hoofdstuk vervolgt met patronen en structuren, formules en variabelen, generaliseren en bewijzen, en mondt uit in een gedifferentieerd model voor de toekomst. Er zijn voldoende aanzetten tot de conceptvorming in dit hoofdstuk te vinden.

Het stippenpatroon bijvoorbeeld (figuur 4 op p. 59): rijen stippen in de vorm van een vierkante matrix, 1 zwarte stip in de eerste kolom aangevuld met grijze stippen en de laatste rij alleen zwarte stippen (dus in geval van een vierkante matrix van 9 stippen: 1 zwarte stip gevolgd door 4 grijze stippen in de eerste 4 rijen en 5 zwarte stippen in de laatste rij), ontwikkelt zich tot de algebraïsche structuur $N^2 = (2N-1) + (N-1)^2$.

Dit patroon wordt niet verder uitgewerkt naar formules, variabelen, generaliseren en bewijzen, of naar het geïntroduceerde model. Het hoofdstuk zou aan overtuigingskracht winnen als volgens dit model: (1) het stippenpatroon (context) zich zou ontwik-

Eindredactie: Hans Cuypers en Hans Sterk
Redactieadres: Review Editors NAW - HG 9.93
Dept. of Math. and Computer Science
Technische Universiteit Eindhoven
Postbus 513, 5600 MB Eindhoven
Webpagina: www.win.tue.nl/wgreview
e-mail: wgreview.win@tue.nl

kelen tot de structuur

$$N^2 = (2N-1) + (N-1)^2 \quad \text{(representatie);}$$

(2) er een verband gelegd wordt met

$$N^2 - (N-1)^2 = 2N - 1 \quad \text{(procedure);}$$

en (3) zich verder ontwikkelt via

$$N^2 - (N-M)^2 = 2NM - M^2$$

en

$$(N-M)^2 = N^2 - 2NM + M^2 \quad \text{(generaliseren)}$$

tot merkwaardige producten (concept). In het hoofdstuk daarna gaat Drijvers verder in op algebraïsche vaardigheden als basisvaardigheden en als symbol sense. Terecht legt hij de nadruk op de ontwikkeling van symbol sense. In de uitwerking daarvan grijpt hij terug naar contexten. Het gaat dan om twee gemeenten A en B die aan dezelfde kant van een spoorlijn, respectievelijk op 5 en 10 km afstand van die lijn liggen. "De afstand van A tot B is (hemelsbreed) 13 km .... De busmaatschappij wil dat de totale afstand $AS + SB$ zo klein mogelijk is. Wat is de beste plaats voor het (trein)station?". De illustratie bestaat uit punten en lijnen. Kan deze context als betekenisvol gekarakteriseerd worden? Verderop illustreert figuur 9 (p. 79) een opgave die algebraïsch redeneren over even en oneven functies beoogt uit te lokken.

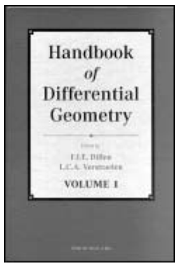
Vraag "Wat valt je op in de grafieken van f, g, en h?" als $f(x) = x^4 - x^2 + 2$, $g(x) = \sqrt{1+x^2}$, en $h(x) = 3^* \cos x$.

Vermoedelijk wordt hier toch enige bemoeienis van de docent verwacht. In dit hoofdstuk legt Drijvers verder geen verbanden met het eerder geïntroduceerde model in hoofdstuk 4.

Henk van der Kooij en Aad Goddijn komen in hoofdstuk 6 met een geslaagde aanzet tot integratie van algebra in andere schoolvakken. Zo is er een rijke variatie te vinden in de ontwikkelgang van context naar representatie. De stap daarna, van representatie naar conceptontwikkeling komt niet aan de orde, daardoor blijft het bij een serie aanzetten tot de vorming van symbol sense. In hoofdstuk 7 spitst Martin Kindt zich toe op de vorming van basiskennis met het oog op conceptontwikkeling (abstractie). Terecht legt hij de vinger op de zwakke plek, te weinig oefening om als automatisme te worden opgeslagen in het geheugen. Basiskennis is noodzakelijk voor de opbouw van wendbare kennis. Cursief en vet gedrukt is de volgende zin te lezen "Goede vaardigheid in rekenen en algebra schept ruimte om productief wiskunde te bedrijven" (p. 108). Menigeen zal deze uitspraak van harte bevestigen. Kindt komt vervolgens met allerlei voorbeelden om technieken te oefenen zoals omkeervragen 'Bedenk een vergelijking waarvan 9 en -10 de enige oplossingen zijn', en 'Zoek een functie y van x zodat $y^2 = 2y'$ (p. 115). Ook de rijtjes, slierten en patronen uit de Rekenkalender (1979) om slim te leren rekenen zijn aanbevelingswaardig. Gelukkig merkt Kindt op "het kwadraatafsplitsen en het ontbinden in factoren in eerste instantie als dé aangewezen oplossingstechnieken te beschouwen bij vierkantsvergelijkingen" (p. 126). Daarnaast geeft hij voldoende uitdagende voorbeelden om oefenen leuk te kunnen vinden, de verbazing van eenzelfde uitkomst van een hele rij opgaven bijvoorbeeld (uit Sawyer, 1969). De tien aanbevelingen om productief te oefenen zijn zeker de moeite van het lezen waard.

Paul Drijvers en Martin van Reeuwijk gaan in hoofdstuk 8 in op de relatie tussen ICT-gebruik en algebra. Onder het kopje 'recente ontwikkelingen' halen zij een voorbeeld uit Moderne wiskunde A1(B1) deel 1, p. 127 aan. Het voorbeeld gaat over onderzoek naar de grafiek van $y = \sin(x-c)$. De vraag is of juist in deze context de pc zo noodzakelijk is. Vermoedelijk is een onderwijsleergesprek minstens zo effectief. Gaat het bij ICT-gebruik juist niet om activiteiten die zónder die hulpmiddelen niet mogelijk zijn? ICT-gebruik in het onderwijs is tenslotte een middel en geen doel. Dit doel wordt verduidelijkt met een illustratie van een applet Geometrische Algebra over $2x^2 + 2y^2 + 5xy$ (figuur 3). De meerwaarde van de meetkundige representatie in deze algebraïsche context is niet direct duidelijk, maar die zal zeker te vinden zijn (p. 141). Drijvers en Van Reeuwijk vinden overigens ook dat de rol van de docent cruciaal is. Bij 'het vermenigvuldigen van lijnen' bijvoorbeeld staat een illustratie (figuur 4, p. 142) met de afbeelding van het scherm van een grafische rekenmachine: grafieken van twee lijnen die allebei de x-as snijden en de grafiek van een tweedegraads functie die uiteraard door dezelfde snijpunten gaat. Wellicht origineel, maar ze geven geen relaties aan met dal- en bergparabolen, kwadratische of lineaire vergelijkingen. De voorbeelden in dit hoofdstuk zijn stuk voor stuk de moeite waard, maar een theoretisch raamwerk ontbreekt. In het laatste hoofdstuk, van de hand van Aad Goddijn, komt de oorsprong van algebra en de betekenis daarvan in de geschiedenis op fraaie wijze tot uiting. Misschien had dit wel het eerste hoofdstuk moeten zijn. Ongetwijfeld is het zo dat dit boek de lezer op ideeën brengt en daarom voldoet aan de oorspronkelijke bedoeling, een brede discussie over betekenisvolle algebra op school. Een 'volbloedwiskundige' zal zich wellicht verbazen over de niet-klassieke opzet en uitwerking. Voor lerarenopleidingen is dit echter een aanrader omdat er voldoende aanzetten te vinden zijn tot reflectie op de plaats die algebra toekomt in het voortgezet onderwijs. Trouwe *Nieuwe Wiskrant* lezers zullen de intenties van de schrijver(s) herkennen. Wie wil weten wat a betekent en zijn algebraonderwijs wil introduceren met elementen uit de geschiedenis of wil integreren met meetkunde, analyse of statistiek moet dit boek zeker aanschaffen.

N. Verhoef



F.J.E. Dillen, L.C.A. Verstraelen (eds.)

Handbook of Differential Geometry (vol. 1)

Amsterdam: North-Holland, 2000
1054 p., prijs $ 187,–
ISBN 0-444-82240-2

The editors of this handbook have taken on a massive task. Their aim is to give a 'rather complete survey of differential geometry'. Wisely enough they make no predictions as to how many handbooks it will take to complete their undertaking. The editors avow their intention to publish chapters covering significant areas of differential geometry as they are sent in by the contributors to these volumes, rather than trying to build the house of differential geometry from its foundations. This may be the only feasible approach, although the resulting somewhat jumbled collection may leave not only this reader slightly dissatisfied.