De sinus: van meetkundige definitie naar analytisch begrip

Martin Alberink, Heleen Muijlwijk, Mark Timmer

Hoe maakt een leerling de overstap van de sinus in een rechthoekige driehoek naar de sinus als functie? Deze vraag stond centraal toen wij gezamenlijk een les ontwierpen, in het kader van onze opleiding aan de Universiteit Twente tot eerstegraads wiskundedocent. Het doel was om gezamenlijk grondig een les voor te bereiden, de les te geven en te evalueren. We kozen ervoor om in de les een inleiding te geven op de sinus als functie, met als uitgangspunt de meetkundige kennis van de sinus.

In dit artikel beschrijven wij onze motivatie voor het maken van een ontwerp van deze les, onze lesdoelen en het lesontwerp, en bespreken wij onze bevindingen. Wellicht kan dit andere (beginnende) docenten ondersteunen in hun eigen lessen over dit onderwerp. In onze les wordt immers expliciet en uitgebreid stilgestaan bij de relatie tussen het meetkundig en analytisch begrip van de sinus, wat naar ons idee een belangrijk onderdeel van de begripsvorming is en weinig aandacht krijgt in de gebruikelijke lesmethoden. Wij hopen collega's met ons lesontwerp te stimuleren en ondersteunen om ook eens wat van het boek af te wijken en leerlingen een dieper inzicht te verschaffen in de goniometrische functies.

Inleiding

In de onderbouw gebruiken havo- en vwo-leerlingen goniometrie in meetkundige vraagstukken. In de bovenbouw moet de stap gemaakt worden van het meetkundig gebruik naar het analytisch gebruik van goniometrie. Dit is voor leerlingen een grote en vaak moeilijke stap. Denk hierbij aan de introductie van concepten als de eenheidscirkel en radialen. Wij hebben daarom een les gemaakt met als doel een uitbreiding van het begrip van de sinus, gebruikmakend van de eenheidscirkel. Er wordt expliciet en stapsgewijs voortgebouwd op de definitie van de sinus in een rechthoekige driehoek. Als die basis eenmaal goed is gelegd, zal de stap naar de cosinusfunctie en naar radialen niet zo groot meer zijn.

We hebben in de voorbereiding van deze les wetenschappelijke literatuur geraadpleegd, maar er bleek niet veel geschreven te zijn over de didactiek van goniometrie. Presmeg [2] schreef dat het belangrijk is om verschillende verschijningsvormen van de sinus te laten zien, zoals de grafiek, de sinus in een driehoek en de sinus in de eenheidscirkel. Dat is ook één van onze uitgangspunten geweest bij het ontwerpen van deze les. Verder gaf Choi-Koh [1] aan dat het gebruik van de grafische rekenmachine een positief effect heeft op het ontdekken van de effecten van variabelen in de standaardfunctie $y = a \sin(b(x\text{-}c)) + d$. Toch laten wij de grafische rekenmachine niet toe in onze les, omdat wij slechts naar de eenvoudige sinusfunctie $y = \sin(x)$ kijken en willen dat leerlingen het verloop van deze functie juist zelf ontdekken.

Voorkennis en lesdoelen

Leerlingen zijn bekend met de sinus als meetkundig begrip. Ze weten dus hoe ze de sinus kunnen gebruiken om zijden en hoeken te berekenen in een rechthoekige driehoek. Daarnaast gaan we uit van ervaring met het werken met assenstelsels, kennis van het begrip kwadrant en de vaardigheid van het herkennen en tekenen van scherpe en rechte hoeken. Tot slot verwachten we dat leerlingen weten dat alle punten op een cirkel een gelijke afstand hebben tot het middelpunt (de straal).

Gegeven deze voorkennis hebben we een aantal lesdoelen opgesteld:

- Leerlingen weten dat de sinus niet alleen meetkundig, maar ook analytisch kan worden gebruikt: de sinus van een hoek in het eerste kwadrant is gelijk aan de y-coördinaat van het snijpunt van het tweede been van de hoek met de eenheidscirkel.
- Leerlingen weten dat in de overige kwadranten de sinus ook is gedefinieerd als de y-coördinaat van het snijpunt van het tweede been van de hoek met de eenheidscirkel.
- Leerlingen kunnen, gegeven een hoek, schatten hoe groot de bijbehorende sinus is.
- Leerlingen kunnen de grafiek schetsen van $\sin(\alpha)$ op het domein van 0° tot 360°.

Er wordt nog niets gedaan met de cosinus, radialen of standaardhoeken. We hebben ervoor gekozen om eerst grondig het concept van de eenheidscirkel en het verband met de sinus uit te leggen. Als dat goed begrepen wordt, volgen de andere concepten daar waarschijnlijk natuurlijk op. In onze ervaring bleek dat inderdaad ook zo te zijn.

Lesplanning

In de lesplanning wordt de uitleg in de les stap voor stap beschreven.

1. Teken een rechthoekige driehoek ABC en schrijf α in hoek A (Figuur 1(a)). Vraag de leerlingen wat ze weten van de sinus van α en begeleid de discussie naar sin(α) = BC/AC. Zet nu “1” naast AC, herleid de formule tot sin(α) = BC, en schrijf “sin(α)” naast BC.
2. Teken een assenstelsel om de driehoek, waarbij punt A precies op de oorsprong ligt (Figuur 1(b)). Kies de schaal zodanig dat de lengte van AC in het assenstelsel precies 1 is. Leg uit waarom je een assenstelsel tekent: zodat je kunt praten over de coördinaten van de hoekpunten van de driehoek. Vertel dat specifiek de y-coördinaat van punt C van belang zal zijn, en heractiveer nog even de kennis over coördinaten door te vragen naar de y-coördinaat van punt B.
3. Merk op dat BC precies verticaal loopt vanwege de rechte hoek, en dat de lengte van BC daarom gelijk is aan het verschil van de y-coördinaten van punt C en punt B. Merk op dat hieruit volgt dat de lengte van BC gelijk is aan de y-coördinaat van punt C.
4. Teken een tweede rechthoekige driehoek AB’C’, met een andere hoek α (Figuur 1(c)). Leg uit dat je punt A wederom op de oorsprong laat vallen om de hoeken goed met elkaar te kunnen vergelijken. Laat met de formule zien dat ook in deze driehoek geldt dat B’C’ = sin(α), en schrijf weer “sin(α)” naast B’C’. Merk op dat de schuine zijden van beide driehoeken even lang zijn, en dat punt A voor beide in de oorsprong ligt; hieruit volgt dat de punten C en C’ op een cirkel met straal 1 en de oorsprong als middelpunt liggen.
5. Teken de bijbehorende cirkelboog in het eerste kwadrant (Figuur 1(d)) en laat zien dat dit betekent dat de lengte van B’C’ gelijk is aan de y-coördinaat van het snijpunt van het tweede been van de hoek met de cirkelboog. Leg uit dat, aangezien B’C’ = sin(α), hieruit volgt dat sin(α) dus weer gelijk is aan deze y-coördinaat. Generaliseer ten slotte door erop te wijzen dat dit resultaat geldt voor iedere hoek α in het eerste kwadrant.

Na deze klassikale uitleg laten we de leerlingen deze kennis in de praktijk brengen door een aantal oefenopgaven te maken van een werkblad[1]. De eerste twee opgaven toetsen of leerlingen de regel y = sin(α) begrepen hebben. Er wordt gevraagd naar de sinus-waarde behorende bij een hoek α en omgekeerd, en naar de minimale en maximale waarde van sin(α).

Na het maken van deze opgaven wordt de klassikale uitleg hervat:

6. Leg uit dat je hoek α zelfs zo groot kunt kiezen dat het tweede been in het tweede kwadrant valt en teken ook zo’n hoek (Figuur 1(e)). Vraag de leerlingen of je bij deze hoek op dezelfde manier als in het eerste kwadrant een driehoek kunt tekenen. Leg uit dat er geen rechthoekige driehoek met hoek α erin meer mogelijk is, en dat de afleiding voor het eerste kwadrant op basis van de meetkundige definitie van de sinus, zoals we die vanaf het begin hebben uitgevoerd, dus niet meer geldt in het tweede kwadrant.
7. Leg uit dat, om de sinus van alle hoeken te kunnen definiëren, in de wiskunde is afgesproken dat het resultaat dat voor het eerste kwadrant is afgeleid ook geldt in de andere kwadranten: sin(α) is gelijk aan de y-coördinaat van het snijpunt van het tweede been van de hoek met de eenheidscirkel.
8. Teken de hele eenheidscirkel en het snijpunt van het tweede been in het tweede kwadrant met de eenheidscirkel. Markeer de y-coördinaat van dit snijpunt en merk op dat sin(α) dus gelijk is aan deze y-coördinaat.
9. Laat als afronding zien hoe de sinusgrafiek ontstaat uit de eenheidscirkel door deze te laten plotten door bijvoorbeeld VU Grafiek (Figuur 1(f)).

Na de tweede ronde klassikale uitleg werkt de klas weer aan de opgaven van het werkblad. De eerstvolgende opgave toetst of leerlingen hebben begrepen hoe de sinus van hoeken groter dan

[1] Het werkblad is te zien op http://fmt.cs.utwente.nl/~timmer/papers/euclides/werkblad.pdf.

90° is gedefinieerd. De leerling vult voor ieder kwadrant in wat de minimale en maximale waarde van de sinus is. Daarna volgt een opgave waarin deze punten in de grafiek van sin(α) aangemerkt moeten worden en de leerling gevraagd wordt om de grafiek door deze punten te tekenen. Tot slot wordt er gevraagd de sinus van enkele hoeken te schatten.

Resultaten

De les is in april 2010 gegeven aan een klas havo 4 wiskunde B aan het Carmel College Salland te Raalte. Later hebben we de werkbladen van de leerlingen geanalyseerd, om te kijken of de lesdoelen behaald waren. De regel $y = \sin(\alpha)$ was goed begrepen; de eerste paar opgaven, die dat toetsten, waren goed gemaakt. Uit de antwoorden op de tweede set opgaven bleek dat de meeste leerlingen het idee doorhadden, maar nog niet goed konden omgaan met de begrippen minimum en maximum. Veel leerlingen schreven op dat de sinus van hoeken in het tweede kwadrant minimaal 1 is en maximaal 0. Dit kan betekenen dat leerlingen dachten aan een minimale en maximale hoek, wat zou betekenen dat ze het beeld van een punt dat over de eenheidscirkel loopt goed voor ogen hadden. Bijna niemand was toegekomen aan de laatste paar opgaven over het schetsen van de grafiek en het schatten van de sinus bij gegeven hoeken. Het is dus aan te raden het werkblad in te korten, of de inhoud te verspreiden over twee lessen.

Conclusies

Het lesontwerp stelde ons in staat om de introductie van de sinus als analytisch begrip te baseren op het bestaande begrip bij de leerlingen van de sinus in een rechthoekige driehoek. Wij denken hiermee veel te hebben gedaan om deze overstap voor leerlingen gemakkelijker te maken. De antwoorden op de werkbladen geven aan dat de leerlingen de analytische definitie van de sinus grotendeels hebben begrepen. Ook hebben de leerlingen een beeld gekregen van de samenhang tussen de eenheidscirkel en de sinus.

We hopen dat deze lesstructuur (beginnende) docenten waardevolle richtlijnen geeft voor de uitbreiding van het sinusbegrip in de bovenbouwklassen van havo en vwo op basis van de bestaande voorkennis.

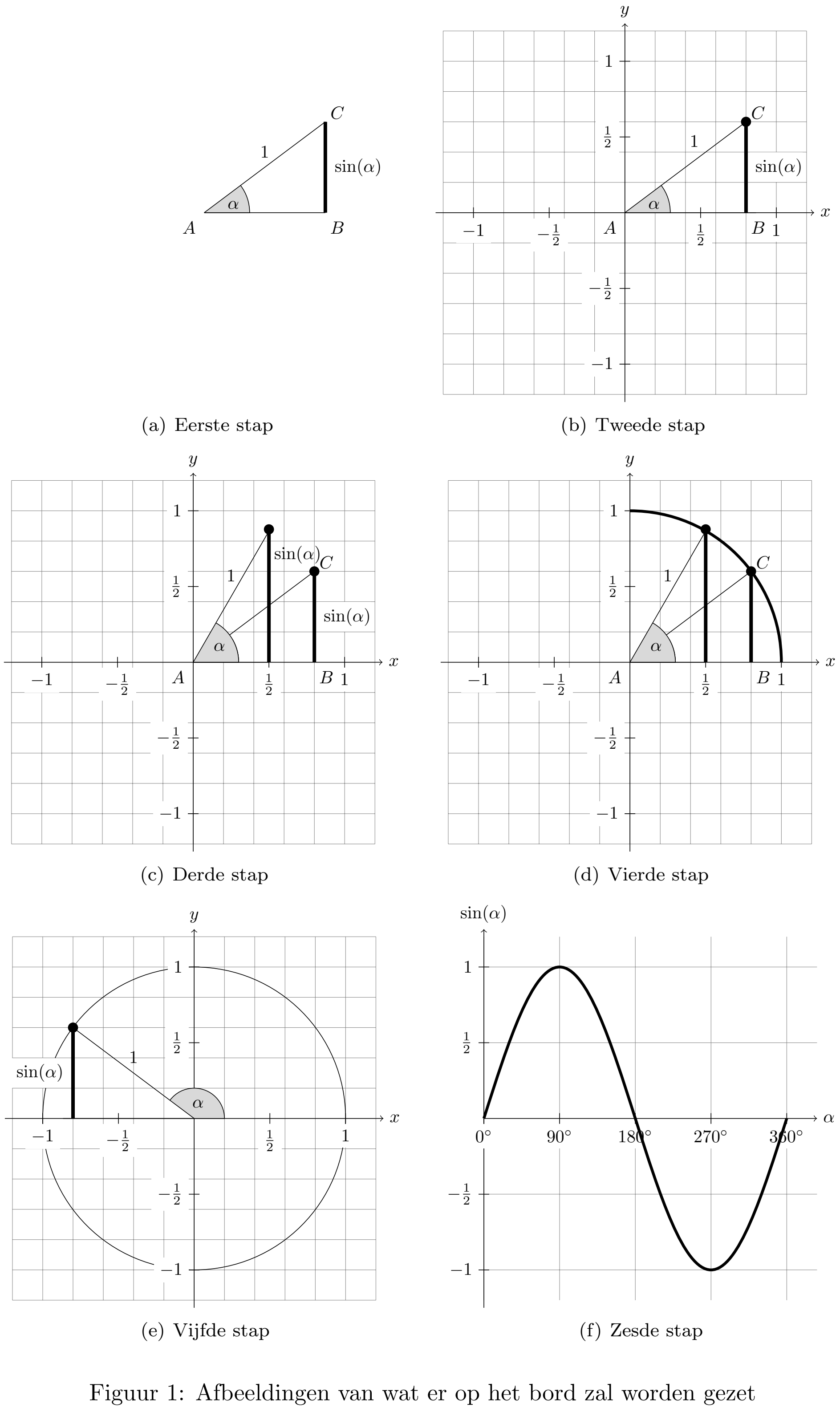
Referenties

[1] Choi-Koh, S. S. (2003). Effect of a graphing calculator on a 10th-grade student's study of trigonometry. The Journal of Educational Research, 96(6):359-369 .

[2] Presmeg, N. (2006). A semiotic view of the role of imagery and inscriptions in mathematics teaching and learning. In: Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M., en Stehlíková, N. (Eds.), Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1, pp 19-34.

Over de auteurs

- Martin Alberink (martin.alberink@gmail.com) is docent wiskunde en natuurkunde aan het Assink Lyceum te Haaksbergen.
- Heleen Muijlwijk (h.muijlwijk@student.utwente.nl) is parttime docent wiskunde aan het Corderius College in Amersfoort. Daarnaast is ze nog bezig met het afronden van de opleiding tot eerstegraads docent.
- Mark Timmer (timmer@cs.utwente.nl) is promovendus aan de Universiteit Twente op het gebied van theoretische informatica. In het kader van een project 'promovendi voor de klas' volgt hij naast zijn werk de opleiding tot eerstegraads docent wiskunde.



(a) Eerste stap

(b) Tweede stap

(c) Derde stap

(d) Vierde stap

(e) Vijfde stap

(f) Zesde stap

Figuur 1: Afbeeldingen van wat er op het bord zal worden gezet