

Nellie Verhoef

Faculteit Gedragwetenschappen, Instituut ELAN
Universiteit Twente
n.c.verhoef@utwente.nl

Onderwijs

Google subsidieert wiskundeonderwijs: een korte indruk uit Zwolle

Met geld van Google was het voor wiskundedocenten mogelijk om ‘gratis’ te worden geschoold om aan de slag te gaan met de vernieuwde examenprogramma’s die beginnen in 2015. Gratis in de betekenis van “je hoeft er niet voor te betalen” – want natuurlijk kost het volgen van de leergang tijd, en dat is ook geld. Nellie Verhoef doet, als betrokken lerarenopleider van buitenaf, verslag.

Google? Inderdaad, Google heeft er geld voor over om het wiskundeonderwijs te verbeteren – of om er invloed op te krijgen? In ieder geval heeft het Platform Bèta Techniek financiële middelen gekregen om te helpen zoeken naar antwoorden op vragen over de vormgeving van de vernieuwing waarbij de beroepspraktijk een prominente plaats inneemt. De in de volksmond geheten Google-leergang vernieuwend wiskundeonderwijs beloofde ‘een intensieve en rijke training’ te worden, waardoor wiskundesecties niet alleen beter in staat zijn zich de eisen van de nieuwe examenprogramma’s eigen te maken, maar ook de invulling daarvan helpen vorm te geven. De leergang biedt wiskundedocenten en vaksecties wiskunde de mogelijkheid om met hun ambities en met vernieuwingen van het onderwijs aan de slag te gaan, zo staat in de brochure te lezen. In de praktijk heeft het Platform Bèta Techniek het beschikbare Google-geld doorgesluisd naar het Freudenthal Instituut (FI), de Stichting Leerplanontwikkeling (SLO) en Platform Wiskunde Nederland (PWN). De inhoudelijke verantwoordelijkheid ligt bij het FI. Feitelijk gaat het om

vijf bijeenkomsten (steeds een vrijdag), waarin docenten niet alleen worden geïnformeerd over de inhoudelijke veranderingen in het examenprogramma, maar ook een kijkje krijgen in de keuken van het functioneren van een wiskundige in het bedrijfsleven en in de wetenschap. Het idee is dat de deelnemende docenten er zorg voor dragen dat de voltallige wiskundesectie van de school op de hoogte raakt. De bijeenkomsten zijn in het najaar van 2013 gehouden in Utrecht en in Zwolle. In het voorjaar van 2014 waren de bijeenkomsten in Delft en in Eindhoven.

Waar gaat het over?

De meest in het oog lopende veranderingen in de nieuwe examenprogramma’s zijn de onderwerpen ‘statistiek met grote bestanden’ en ‘analytische meetkunde’. De onderwerpen ‘denkactiviteiten’ en ‘authentieke toepassingen’ vlechten zich hier doorheen. In de praktijk nemen verscheidene wiskundigen de deelnemende docenten in vier verschillende bijeenkomsten in gedachten mee naar het bedrijfsleven, waarin wiskunde in de dagelijkse beroepspraktijk een sleutelrol speelt. Tijdens

iedere bijeenkomst staat een van de nieuwe onderwerpen uit het examenprogramma centraal. Daarnaast gaan docenten in de bijeenkomsten samen aan de slag met het ontwerpen van lesmateriaal. De docenten kiezen zelf het onderwerp waarin ze zich willen gaan verdiepen, en werken daar dan bij alle vier de bijeenkomsten aan. De vijfde bijeenkomst is een terugkomdag waarin de lesmaterialen aan elkaar worden gepresenteerd.

Denkactiviteiten

In de eerste bijeenkomst met de titel ‘Denkactiviteiten’ treedt John Poppelaars op, van huis uit econometrist en directeur consulting bij het bedrijf ORTEC. ORTEC is specialist op het gebied van operations research (OR) en meester in het oplossen van optimaliseringsproblemen. De wiskunde speelt in het werk dat ORTEC voor haar klanten doet een centrale rol. Zij zorgt ervoor dat de toenemende complexiteit in besluitvorming beheersbaar wordt, helpt in het structureren van problemen, objectiveert en helpt uiteindelijk de best mogelijke oplossing te vinden. In zijn lezing laat John zien dat steeds meer bedrijven succesvol zijn dankzij het gebruik van wiskunde. Bedrijven als Google en Amazon, maar ook Air France KLM en TNT Express, zouden zonder de inzet van wiskundige technieken niet zo succesvol zijn. John benadrukt dat met de huidige technologische trends de behoefte aan goed



John Poppelaars

opgeleide wiskundigen alleen maar zal toemenen. Daarbij zal de nadruk liggen op het probleemoplossend vermogen en de creativiteit waarmee problemen worden benaderd. In het wiskundeonderwijs moet daar veel meer aandacht aan worden gegeven. Paul Drijvers (FI en toetsdeskundige bij het CITO) gaat vervolgens in op denkactiviteiten en Daan van Smaalen (promovendus bij ELAN aan de UT) eindigt met Lesson Study: een methode om de ontworpen materialen te implementeren en bij te stellen.

Geïnspireerd door de sprekers gaan de Zwolse cursisten in het middagprogramma zelf aan de slag. De ene helft van de cursisten kiest voor statistiek met grote bestanden en de andere helft wil zich gaan verdiepen in analytische meetkunde: twee nieuwe onderwerpen in het eindexamenprogramma vwo wiskunde B. Er ligt wat (cTWO-)voorbeeldmateriaal op tafel. De cursisten vinden het spannend om zelf op zoek te gaan naar kernelementen die voor leerlingen van



Paul Drijvers

belang zijn in de context van statistiek met grote bestanden en analytische meetkunde.

Statistiek met grote bestanden

In de tweede bijeenkomst is het onderwerp statistiek met grote bestanden, en is het woord aan Eric Cator. Eric Cator promoveerde in 1997 in de functionaalanalyse. Daarna kwam hij in Delft terecht en maakte hij een switch naar de mathematische statistiek, en later ook naar de kansrekening. Hij is sinds 2012 hoogleraar toegepaste stochastiek aan de Radboud Universiteit Nijmegen. Naast zijn sterk wiskundig georiënteerde onderzoek, heeft Eric ook veel ervaring met praktische toepassingen van de statistiek. Eric heeft veel bedrijven en organisaties geadviseerd, variërend van het Ministerie van Economische Zaken tot Shell. In zijn lezing laat hij zien dat met behulp van simulatie, statistische concepten op een intuïtieve manier duidelijk zijn te maken, zonder gebruik te hoeven maken van wiskunde boven het elementaire



Daan van Smalen

niveau.

Henry Kuipers gaat vervolgens, als docent onderzoeksmethodologie en statistiek bij de Hogeschool Van Hall Larenstein, in op de problemen die zich voordoen bij het opzetten van een onderzoeksleerlijn. Hij heeft veel ervaring met het begeleiden van studenten, die voor opdrachtgevers uit het werkveld toegepast onderzoek moeten doen en daarbij statistiek nodig hebben. In zijn lezing laat hij zien hoe je gebruik kunt maken van conceptuele modellen om de (verwachte) relaties tussen de variabelen in een groot bestand te visualiseren. Ook legt hij uit hoe je met behulp van statistische technieken komt tot een selectie van onafhankelijke variabelen die zoveel mogelijk van de variatie in een afhankelijke variabele verklaren.

De Zwolse cursisten gaan nu echt op zoek: hoe kunnen we leerlingen boeien en hoe kunnen we hen prikkelen om gedreven aan de slag te gaan met een enorme hoeveelheid data? Dichtbij huis zijn leerlinggegevens van een school een aanlokkelijk perspectief: aantallen per profiel, aantallen per vak, cijfers, geslacht, leeftijd, et cetera. Excel lijkt daarbij een ideaal hulpmiddel te zijn. En bij de analytische meetkunde: hoe kunnen we nu laten zien waarom vectoren belangrijk kunnen zijn? Wat heb je eraan om slim een assenstelsel te kiezen (zie Figuur 1)?

Analytische meetkunde

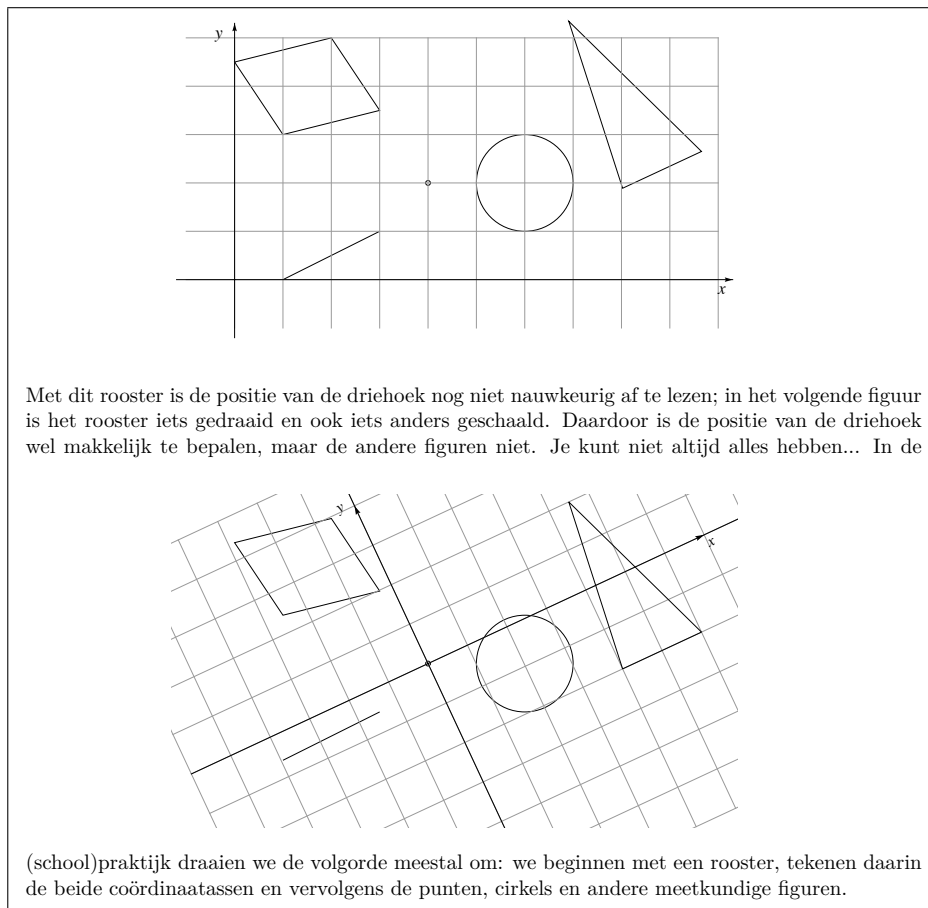
In de derde bijeenkomst staat de analytische meetkunde centraal en wordt de eerste lezing verzorgd door Martijn Slob van het wiskundig ingenieursbureau LIME. LIME is begonnen als een initiatief van de faculteit Wiskunde & Informatica van de Technische Universiteit Eindhoven en groeide uit tot een zelfstandige dienstverlener voor de technische indus-



Eric Cator



Henry Kuipers



Figuur 1 Materiaal gemaakt tijdens de Leergang Wiskunde Zwolle: analytische meetkunde.

trie. Inmiddels bestaat LIME uit bijna twintig experts met een achtergrond in technische wiskunde, natuurkunde, lucht- en ruimtevaart en econometrie. Zo heeft LIME bijvoorbeeld oplossingen ontwikkeld voor een efficiënter, goedkoper en milieuvriendelijker verpakings- en transportproces. In de lezing gaat Martijn in op het herleiden van trajectorieën van puin door de atmosfeer op basis van videobeelden. Martijn gebruikt in zijn lezing

fraaie satellietbeelden waardoor je je dolende waant in het heelal.

Aad Goddijn (FI en inmiddels gepensioneerd) vervolgt met zijn visie, waarin hij meetkunde betitelt als een samenhangend geheel waarin plaats is voor op realistische ervaring gestoelde meetkundige intuïties en voor denken met meer abstracte en formele hulpmiddelen. Hij memoreert dat meetkunde vroeger op school in gescheiden lessen werd ge-



Martijn Slob



Aad Goddijn

geven: enerzijds (klassieke) meetkunde puur gebaseerd op axioma's en bewijzen, waarin resultaten door redeneren worden bereikt, en anderzijds analytische meetkunde gebaseerd op coördinaten en algebra, waarin resultaten door berekening worden bereikt. Aan de hand van enkele meetkundig-algebraïsche problemen op diverse niveaus verkent hij die samenhang en stelt hij de vraag hoe meetkundig-algebraïsch inzicht en vaardigheid bij de leerlingen bevorderd kan worden.

De Zwolse cursisten gaan onverdroten door met het uiteenrafelen van grote databestanden. Een mooie opdracht is bijvoorbeeld de vraag naar het gemiddelde cijfer voor wiskunde per leerjaar uitgesplitst naar schooltype en geslacht. Bij de analytische meetkunde wordt het duidelijk dat vectoren toch wel handig zijn, zeker als het gaat om het bepalen van afstanden. In het oog springende kernelementen van analytische meetkunde zijn voor leerlingen: “noem de oplossing nu eens x ”, “kies een geschikt assenstelsel” en “noem een willekeurig punt $P(x, y)$ ”. Bovendien gaat het om het gebruik van andere notaties met (x_i, y_i) , zoals in Figuur 2. Het besef ontstaat dat de normaalvergelijking van een lijn heel handig is om afstanden te bepalen: zie Figuur 3.

Authentieke toepassingen

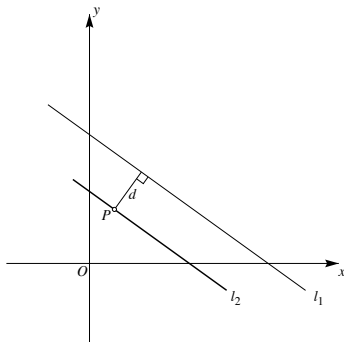
De vierde bijeenkomst concentreert zich op authentieke toepassingen van wiskunde. Edwin Vollebregt studeerde technische wiskunde in Delft en is hier vervolgens ook gepromoveerd. Samen met Mark Roest besloot hij na zijn promotie het bedrijf VORtech op te richten, om door te kunnen gaan met het werk dat hen het meest boeide: wetenschappelijk rekenwerk. Binnen VORtech heeft hij allerlei rollen vervuld — van uitvoerend werk, ontwerpen en projectleiding tot strategie en beleidsvorming. Tegenwoordig richt hij zich op het verder ontwikkelen van het CONTACT-model dat de interactie tussen treinwielen en rails beschrijft. Hij geeft aan wat er komt kijken bij het maken van een goed simulatiemodel. De toepassing van het waterbeheer is hier een voorbeeld waar bij VORtech jarenlang aan gewerkt is. Via de Deltawerken gaat hij in op numerieke analyse en computersimulatie.

Rebecca Hamer sluit de rij als onderwijskundige en voormalig docent natuurkunde en beleidsonderzoeker van verkeer en vervoer, gezondheid, onderwijs en ICT. Voor haar staat het vast dat (het gebrek aan) een interessant toekomstperspectief een belangrijke reden voor leerlingen is om al of niet voor de exacte vakken te kiezen is — iets wat ook

8 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ en $C(x_3, y_3)$ zijn de hoekpunten van $\triangle ABC$, waarvan het zwaartepunt Z is. Bewijs de volgende formule:

$$x_Z = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \quad \text{en} \quad y_Z = \frac{1}{3}(y_1 + y_2 + y_3)$$

Figuur 2 Rekenen in een assenstelsel.



Figuur 8 P kan over l_2 bewegen zonder dat de afstand tot l_1 verandert

Wat is de vergelijking van l_2 ?

De evenwijdigheid impliceert dat we dezelfde A en B hebben als in l_1 . Alleen de ' C ' is anders. Zeg D .

D berekenen we door de coördinaten van P in te vullen:

$$\begin{aligned} Ax + By + D &= 0 \\ Ax_P + By_P + D &= 0 \\ -D &= Ax_P + By_P \end{aligned}$$

De afstand tussen de lijnen l_1 en l_2 is nu de gezochte afstand van P tot l_1 :

$$\begin{aligned} d(l_2, l_1) &= \frac{|C - D|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \\ d(P, l_1) &= \frac{|Ax_P + By_P + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \end{aligned}$$

Figuur 3 De normaalvergelijking van een lijn.

in verschillende onderzoeken naar profiel- en studiekeuze is aangetoond. Leerlingen weten vaak niet welke interessante beroepen bereikbaar zijn met een exact profiel en studie, en hebben zeer stereotiepe verwachtingen.

Dit geldt nog het sterkst voor wiskunde. Rebecca pleit voor het leggen van relaties tussen de schoolstof en de breedte van de beroepspraktijk. Dit vergroot volgens haar naast de beleving van leerlingen ook de horizon van

docenten, die hierdoor hun lessen meer gaan zien als iets voor de toekomst van de leerlingen dan alleen als een middel om hen aan een diploma te helpen.

Wat is de uiteindelijke opbrengst?

De Zwolse cursisten zijn er nog steeds mee bezig. Bij het onderwerp statistiek is de dataset eindeloos uit te breiden en de vragen ook. Bij het onderwerp analytische meetkunde blijft de vraag naar de zin van de introductie van vectoren actueel. Vectoren zijn onlosmakelijk verbonden met beweging — transformaties. En dat is precies de kern.

Natuurlijk hopen we dat deze leergang wiskundedocenten stimuleert om leerlingen warm te maken voor de nieuwe onderdelen statistiek met grote databestanden, analytische meetkunde, authentieke toepassingen en wiskundige denkactiviteiten. Maar vooral is van belang dat docenten hun leerlingen laten zien wat wiskundigen doen in de praktijk van alledag, wat hun invloed is op mens en maatschappij (900.000 banen die afhankelijk zijn van wiskunde met een invloed van 71 miljard euro). Er lonkt voor aanstormend jong talent een dynamische toekomst, wijd vertakt en o zo nuttig en praktisch bruikbaar! ←



Edwin Vollebregt



Rebecca Hamer

Naschrift

Het materiaal over analytische meetkunde, waar in dit artikel drie onderdelen uit zijn getoond, is ontworpen door Arie Ebbers, Jan Keemink, Ronnie Koolenbrander, Jan Otto Kranenborg, Martijn Nass en Nanja de Rie. Meer informatie over de leergang, alsmede de ontwikkelde materialen, zijn te vinden op <http://www.leergangwiskunde.nl>.