

Hajo Broersma

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
hajo.broersma@durham.ac.uk

Henri Ruizenaar

Faculteit Elektrotechniek, Wiskunde en Informatica
Universiteit Twente
Postbus 217
7500 AE Enschede
h.w.a.ruizenaar@math.utwente.nl

Promotionele activiteiten op de Universiteit Twente

Handelsreizigers in wiskunde

In dit artikel wordt een beschrijving gegeven van een masterclass voor leerlingen van 5 vwo die aan de Universiteit Twente werd georganiseerd. Het doel was om wiskunde onder de aandacht te brengen, met name de toepassingen van wiskunde en wiskunde als onderwerp voor het profielwerkstuk, en hiermee iets te doen aan het imago van wiskunde. De auteurs, die beiden in deeltijd werkzaam zijn aan de Universiteit Twente, zijn betrokken geweest bij de organisatie en dagelijkse begeleiding van deze masterclass.

Eén van de verplichte onderdelen van het examendossier in het vwo is het maken van een profielwerkstuk. De nadruk ligt hierbij op informatievaardigheden, onderzoeksvaardigheden en communicatieve vaardigheden. In de afgelopen jaren is gebleken dat de meeste leerlingen hierbij niet voor het vak wiskunde kiezen. Redenen daarvoor zouden kunnen zijn:

- onbekendheid met het grote aantal mogelijkheden binnen wiskunde
- onbekendheid met de vele toepassingen van wiskunde
- onzekerheid met betrekking tot het eigen kunnen binnen wiskunde
- het hoge abstractieniveau binnen het vak wiskunde
- minder goede schoolervaringen van de leerling met wiskunde
- het algemene imago van wiskunde.

Om leerlingen te stimuleren hun profielwerkstuk in wiskunde te maken, heeft de Universiteit Twente het initiatief genomen — in

navolging van eerdere initiatieven in Nijmegen — voor een masterclass. De masterclass helpt vwo leerlingen bij het maken van dat werkstuk en laat ze kennis maken met de mogelijkheden en toepassingen van het vak wiskunde. En minstens zo belangrijk: de masterclass biedt aan leerlingen de mogelijkheid om de sfeer binnen de Universiteit Twente te leren kennen en aan de universiteit een mogelijkheid om het imago van wiskunde te verbeteren.

Van start

In het schooljaar 2003/2004 is de Universiteit Twente gestart met de masterclass *Spelen met grafen*. Deze masterclass bood leerlingen uit de omliggende regio met een bèta-profiel de mogelijkheid om kennis te maken met het vak wiskunde en tegelijkertijd te werken aan het wiskunde-profielwerkstuk.

De masterclass bestond uit zeven bijeenkomsten van een middag op de Universiteit Twente in de periode februari tot en met april. Er werd door achttien leerlingen uit 5 vwo deelgenomen en er waren drie stafleden en vier student-assistenten betrokken bij de begeleiding. De eerste drie middagen waren bestemd voor een algemene inleiding in de grafentheorie aan de hand van het Zebra-boekje *Grafen in de Praktijk*.¹ Hieruit werden achtereenvolgens enkele onderwerpen behandeld, zoals graafkleuringen, netwerken en kortste paden. Een deel van de stof werd daarbij als huiswerk meegegeven en de volgende keer behandeld. Tijdens de derde bijeenkomst illustreerden stafleden in korte presen-

taties vier mogelijke specialisaties en vragenstellingen:

- a. roosterproblematiek; hoe kunnen (middelbare school) lesroosters met behulp van grafentheorie gemodelleerd en opgesteld worden?
- b. speltheorie; hoe bepaal je winnende strategieën bij *Nim*-spelen?
- c. het handelsreizigersprobleem; hoe bepaal je optimale rondritten met behulp van grafentheorie?
- d. graafrepresentatie; hoe kun je een graaf omzetten in een getal en vice versa?

Hieruit konden de leerlingen kiezen waar ze de tweede helft van de masterclass aan wilden werken en hun profielwerkstuk over wilden schrijven. Om een indruk te geven hoe deze onderwerpen aan de orde werden gesteld in de masterclass gaan we verderop in dit artikel dieper in op het derde onderwerp.

Nadat iedere leerling een specialisatie had gekozen kon deze worden uitgediept in de daaropvolgende drie middagen. In de zevende bijeenkomst gaven alle deelnemende leerlingen in paren een presentatie over hun werkstuk en specialisatie. De masterclass werd afgesloten met het profielwerkstuk, dat eerst in concept werd besproken en becommentarieerd door de begeleiders en vervolgens kon worden ingeleverd. De uiteindelijke beoordeling berustte bij de respectievelijke vwo docenten.

Het handelsreizigersprobleem

In de eerste bijeenkomst van de tweede helft van de masterclass werd het probleem van de



Tijdens de zevende bijeenkomst (6 april) van de masterclass gaven de leerlingen, onder belangstelling van de hiervoor uitgenodigde wiskundeleraars, een presentatie over hun specialisatie en het profielwerkstuk.

handelsreiziger uitgelegd: het vinden van een optimale rondrit (gemeten in totale afstand of totale kosten) door alle te bezoeken plaatsen of steden. In vraag- en antwoordsessies met één begeleider en zes leerlingen en aan de hand van werkbladen werd vervolgens ingegaan op diverse aspecten van het probleem. Hierbij werden de leerlingen zoveel mogelijk gestimuleerd om zelf met de relevante ideeën te komen. Aan bod kwamen de modellering van dit probleem met behulp van grafentheorie, andere problemen die te reduceren zijn tot hetzelfde model, en de overeenkomsten en verschillen met eerder behandelde stof over het vinden van kortste routes en optimale netwerken.

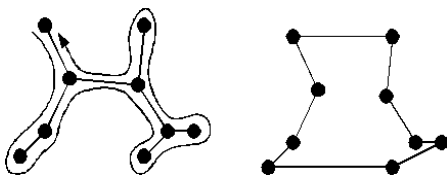
Het handelsreizigersprobleem is een van de bekendste representanten van de klasse van NP-moeilijke problemen. Dat het handelsreizigersprobleem een NP-moeilijk probleem is impliceert onder andere dat iedere bekende exacte methode om het probleem voor n steden op te lossen een benodigde hoeveelheid rekenstappen (en dus rekestijd) vergt die exponentieel groeit in n (en dat dit benodig-

de aantal rekenstappen niet polynomiaal in n kan zijn, tenzij $P = NP$). Deze complexiteit van het handelsreizigersprobleem werd, wederom in groepjes, op een intuïtieve manier benaderd. Er werd hierbij uiteraard niet diep op de technische aspecten ingegaan. In plaats daarvan kwamen de leerlingen er door eigen verkenningen achter dat in de praktijk het beste gezocht kan worden naar heuristieken. Dit zijn snelle algoritmen die gemaakt zijn om een goede benadering van de optimale oplossing (rondrit) te vinden. Ze zijn gebaseerd op een aantal vuistregels die voortkomen uit een verdere analyse van het probleem: Welke keuzes zijn goed en welke zijn slecht (op het eerste gezicht) voor het vinden van een goede rondrit?

Na deze inleidende discussies werden de leerlingen gestimuleerd om zelf een heuristiek te ontwerpen en te beschrijven. Vervolgens was het tijd voor een kritische analyse: Voor welke voorbeelden en situaties werkt de heuristiek ogenschijnlijk goed en voor welke slecht? Geeft dit aanleiding tot het bijstellen of veranderen van de heuristiek?

Thuisopdrachten

Als voorbereiding op de vervolgbijeenkomsten en voor de nodige achtergrond bij het profielwerkstuk, kregen de leerlingen aan het eind van elke bijeenkomst een aantal thuisopdrachten mee. Als voorbeeld noemen we de opdracht om via internet te zoeken naar informatie over het handelsreizigersprobleem



Figuur 1 Constructie van een kortere rondrit uitgaande van een optimale opspannende boom die dubbel doorlopen wordt.

en naar een verwant spel over een reis rond de wereld van Sir William Rowan Hamilton uit de negentiende eeuw.

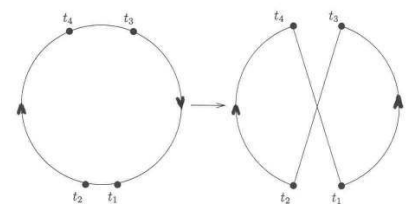
Elk van de vervolgbijeenkomsten begon met een bespreking van de voortgang van de diverse groepjes en een behandeling van eventuele vragen en opmerkingen. Met behulp van werkbladen gingen de leerlingen vervolgens in op bekende theorie en heuristieken met betrekking tot het handelsreizigersprobleem. Er is en wordt op dit gebied bijvoorbeeld veel onderzoek gedaan naar onder- en bovengrenzen voor de lengte van een optimale rondrit. Deze grenzen kunnen helpen bij de analyse van heuristieken. Daarvan zijn er een groot aantal ontwikkeld, waarvan een aantal zeer geschikt is voor het behandelen tijdens een masterclass als deze. Ze zijn veelal gebaseerd op eenvoudige principes. Zo is er een heuristiek die uitgaat van een optimale opspannende boom (behandeld in *Grafen in de Praktijk* en tijdens de inleidende middagen) waarin alle lijnen dubbel gebruikt worden om ervoor te zorgen dat er een rondrit gemaakt wordt. Vervolgens wordt gezocht naar goede lijnen om van hieruit een geschiktere rondrit te construeren, zoals aangegeven in figuur 1.

Een tweede voorbeeld zijn heuristieken die vanuit een (willekeurige) rondrit-oplossing proberen om via verwisselingen van paren lijnen een verbetering te vinden, zoals aangegeven in figuur 2.

Slechts op één manier kan met twee andere verbindingen in plaats van t_4t_3 en t_1t_2 de rondrit hersteld worden. Merk daarbij op dat op een van de tussenliggende segmenten van de rondrit de richting wordt omgedraaid; zie het rechterplaatje in de figuur. Uit de aanname dat de afstanden tussen de punten symmetrisch zijn (dat wil zeggen dat de kosten om een bepaalde weg af te leggen in beide richtingen hetzelfde zijn), volgt dat de totale lengte van de nieuwe rondrit kleiner is dan die van de oude rondrit als voor de lengten van de verbindingen geldt:

$$L(t_3t_2) + L(t_4t_1) < L(t_4t_3) + L(t_1t_2)$$

Het bovenstaande kan worden uitgebreid naar drietallen en verder.



Figuur 2 Verwisseling van een paar lijnen in een graaf. De halve cirkels stellen de rest van de graaf voor, die hierbij onveranderd blijft.

In de bijeenkomsten werden de leerlingen gestimuleerd na te denken over de achtergronden van de bekende heuristieken: Hoe zijn ze tot stand gekomen? Hoe is men op dit idee gekomen? Waarom wordt er voor deze aanpak gekozen? Zijn er voorbeelden te vinden waarvoor een bepaalde heuristiek slechte oplossingen genereert? Zo werd het inzicht vergroot dat het handelsreizigersprobleem intrinsiek moeilijk op te lossen is. Bovendien werd hiermee de indruk weggenomen dat wiskunde een afgerond geheel is. Het was verrassend te zien hoe weinig de leerlingen bewust waren van het feit dat wiskunde een actief en levend vakgebied is!

Ervaringen en vervolg

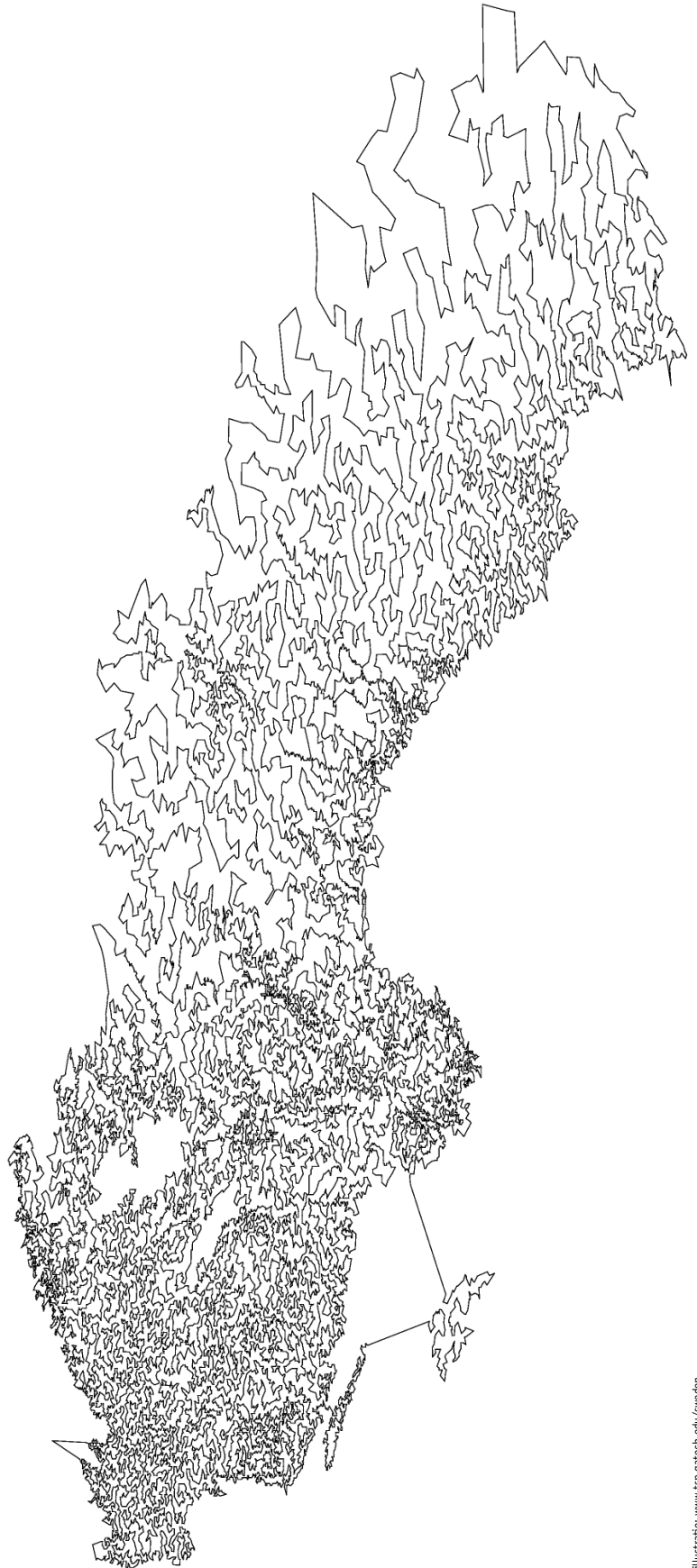
Twee weken na deze zeven bijeenkomsten is door elke groep een concept profielwerkstuk ingeleverd, waarop commentaar is gegeven door de begeleiders. De inleverdatum voor de profielwerkstukken verschilt per school, maar de masterclass had een vooraf vastgelegde looptijd. Daarom was de mogelijkheid om ook de definitieve versie van het profielwerkstuk door de begeleiders van de masterclass te laten becommentariëren gelimiteerd. Groepen die gebruik wilden maken van deze mogelijkheid, alvorens hun werkstuk in te leveren bij hun eigen vakdocent, moesten het profielwerkstuk voor 1 mei 2004 inleveren. De meeste groepen hebben hiervan dankbaar gebruik gemaakt. De begeleiders hebben veel lof voor de inzet van de leerlingen, en zowel de leerlingen als de begeleiders kijken tevreden terug op deze eerste masterclass.

Op 22 februari 2005 is een nieuwe cyclus van zeven masterclasses voor 5 vwo scholieren gestart. Het aantal onderwerpen is met een drietal uitgebreid. Nieuwe onderwerpen zijn afkomstig uit de financiële wiskunde, de numerieke wiskunde en de telecommunicatie. ←

Informatie: www.schoolsite.utwente.nl/tw

Referentie

- 1 H.J. Broersma, *Grafen in de Praktijk*, Boekje 14 in the serie Zebra (2002), Epsilon Uitgaven, Utrecht, ISBN 90-5041-078-2.



In mei 2004 is het handelsreizigersprobleem voor alle 24.978 plaatsen in Zweden opgelost: er is een pad met een lengte van 855.597 TSPLIB eenheden (ongeveer 72.500 kilometer) gevonden en het is bewezen dat een korter pad niet bestaat. Dit is momenteel het grootste opgeloste handelsreizigersprobleem; het vorige record van 15.112 plaatsen in Duitsland uit april 2001 is hiermee gebroken.