Lesson study - deel 3

ERVARINGEN BIJ DE INTRODUCTIE VAN PERIODIEKE BEWEGINGEN

[Nellie Verhoef en Mark Timmer]

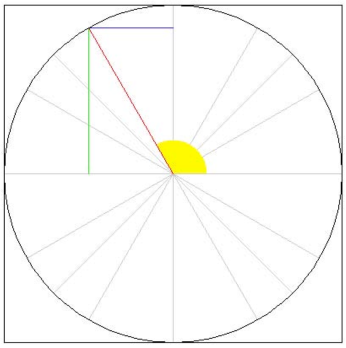
Het eerste artikel in deze serie ging over 'lesson study' als methode om het vak van docent te leren of blijvend te verbeteren. Het tweede artikel beschreef de ervaringen met bewijzen in de meetkunde (zie de paragraaf Info). Dit derde artikel gaat in op lesontwerpen die gaan over de overgang van een meetkundige benadering van de (co)sinus naar de analytische benadering in de vorm van een periodieke beweging. Een onderwerp dat in 4-vwo aan de orde zou komen, en dat de docenten na aan het hart lag.

Inleiding

Het plan leek haalbaar: drie uitvoeringen van lessen op verschillende scholen voor de voorjaarsvakantie en drie uitvoeringen op drie andere scholen erna. Dat werd dan wel hard werken. Het uitgangspunt was een zoektocht naar een vloeiende overgang van de meetkundige representatie met rechthoekige driehoeken (in klas 3) en de definitie van de sinus als een verhouding (lengte overstaande zijde : lengte schuine zijde), naar een analytische representatie in de vorm van de grafiek van een functie afhankelijk van de hoek in radialen (in klas 4). Zo lagen er spontaan in de beginfase vier lesontwerpen op tafel, elk voor twee opeenvolgende lessen. Twee lesontwerpen leken op elkaar en op de aanpak van het boek. Besloten werd deze twee ontwerpen uit te werken en door drie koppels uit te laten voeren voor de vakantie. De andere – sterk van elkaar verschillende – ontwerpen zouden dan na de vakantie door de drie overgebleven koppels uitgevoerd kunnen worden.

De drie lesontwerpen

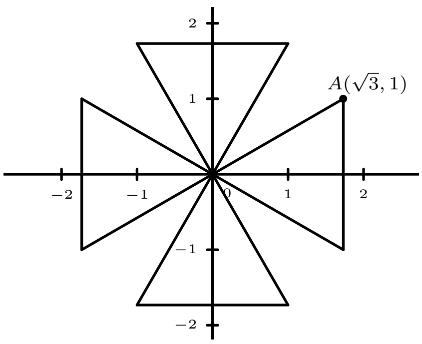
Het eerste lesontwerp is vooral procedureel van aard, vergelijkbaar met Alberink, e.a. (2011; zie [1]). De bekende sos-cas-toa-regel wordt gebruikt in de eenheidscirkel. Leerlingen worden in dit ontwerp uitgedaagd om te kijken naar een stomphoekige in plaats van een scherphoekige driehoek; ***zie figuur 1*** [a]. Als je de GR gebruikt, vind je wel degelijk een antwoord als je de sinus van een stompe hoek opzoekt. Het idee is dat leerlingen het periodieke verloop, afhankelijk van de hoek, zelf ontdekken.
De variant op dit ontwerp lijkt wat op het voorgaande, alleen wordt hier meer met symmetrie in de eenheidscirkel gedaan. Dit ontwerp is geïnspireerd door het HEWET-pakket SINUS van het Freudenthal Instituut (1987). De docenten introduceren een soort 'molentje' om de



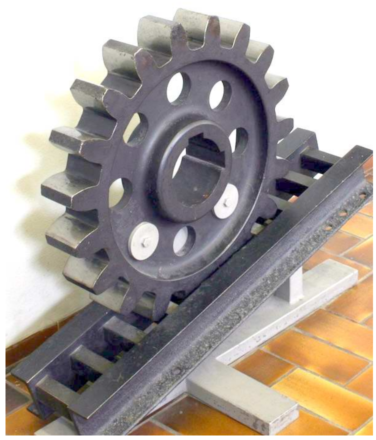
figuur 1 Een applet over de eenheidscirkel

symmetrie-eigenschappen te benadrukken (***zie figuur 2***). In dit ontwerp maken de docenten bewust geen gebruik van een applet; het redeneren (eerst zelf doen) staat centraal. Een reactie van een collega in de voorbereidende bijeenkomst: 'Ik zou gewoon zeggen: jongens, gewoon alles vergeten wat je in de derde klas hebt geleerd over de sinus en cosinus. We kijken nu naar periodieke bewegingen, ik kom er later wel op terug.' Dat idee haalde het niet…

Het tweede lesontwerp gaat uit van de tandrad(iaal)baan (***zie figuur 3***). In dit ontwerp staat de afstand – de lengte van de cirkelboog – centraal. Het idee is om leerlingen te laten nadenken over het aantal tanden in relatie tot de hoogte,



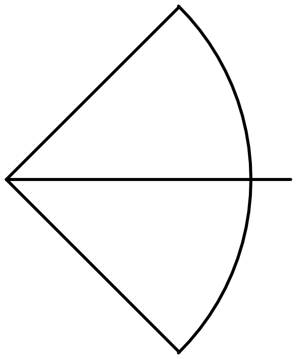
figuur 2 Een molentje



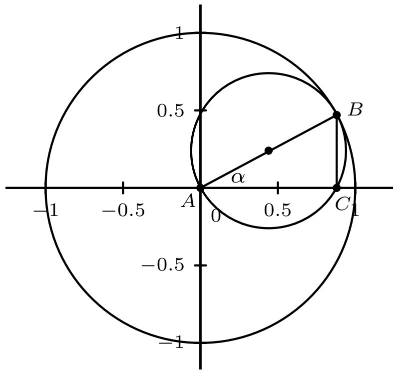
figuur 3 Een tandradbaan

overgaand in een relatie met de afgelegde afstand (booglengte). De radiaal is dan een vanzelfsprekende grootheid geworden omdat er een direct verband is met de omtrek van een cirkel. Eigenlijk zijn de leerlingen in de eenheidscirkel aan het werk. Het plan is om later met Pythagoras aan de slag te gaan, waarbij dan geen hoeken, maar radialen worden gebruikt. Onderzoeksbevindingen geven aan dat leerlingen bij het denken over (co)sinussen maar moeilijk afkomen van een direct verband tussen een hoek en de lengtes van de zijden van een rechthoekige driehoek (zie [4]). Heck (2012; zie [3]) gaat zelfs nog verder en begint met opwindfuncties, eindigend in de sinusfunctie.

Het derde ontwerp is voor iedereen nieuw, maar of het uitvoerbaar is? Het idee is een aanpak vanuit een historisch perspectief: het *periodiek* draaien van de aarde om de zon. De cirkelbeweging wordt nu als uitgangspunt genomen. Immers, in een cirkel is de booglengte, en de overeenkomstige hoek dus ook, direct te koppelen aan de lengte van de bijbehorende koorde. Vervolgens gaat het om het meten van een hoek. De grootte van een hoek



figuur 4 Pijl en boog

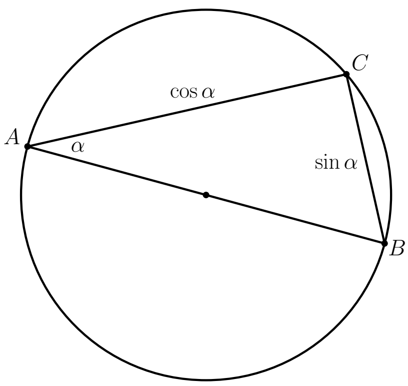


figuur 6 Twee cirkels, de sinus en de cosinus

(in een cirkel) is afhankelijk van de lengte van de boog en de afstand van de boog tot het hoekpunt. De lengte van de boog is recht evenredig met de straal. Als we een of andere eenheid voor de straal van de cirkel nemen en de lengte van de boog in die eenheid meten, dan is het resultaat de hoek in *radialen.* Bijvoorbeeld, de straal is 1,2 cm en de lengte van de boog is 1,4 cm, dan is de grootte van de hoek in radialen: 1,4/1,2 = 1,01667 rad. Je zou dit verband in een tabel kunnen weergeven. Op deze manier heb je een relatie gevonden tussen hoeken en radialen, kort samen te vatten in een figuur die op een pijl en boog lijkt (***zie figuur 4***).

Het begrip 'sinus' houdt van oorsprong verband met een cirkel. In een cirkel met middellijn 1 hoort bij boog α, de koorde sin α (***zie figuur 5***). Wanneer we deze cirkel spiegelen, draaien en in een eenheidscirkel plaatsen, zien we direct het verband tussen de hoogte van een punt en de sinus van de bijbehorende hoek, en evenzo met de cosinus (***zie figuur 6***).

Deze drie lesontwerpen vormden de basis, waarop aan de hand van theorie werd gereflecteerd en bijgesteld.



figuur 5 Boog α en koorde sinus α

Theorie over het wiskundig denken

De lesontwerpen zijn in bijeenkomsten op de UT bekeken aan de hand van literatuur over de ontwikkeling in het denken. Specifiek is gekeken naar de door Bruner (1966; zie [2]) geïntroduceerde opeenvolgende stappen in de ontwikkeling van het denken, gebruikmakend van representaties: (1) het doen van activiteiten, (2) het gebruik van iconen en (3) het denken in symbolen. Het doen van activiteiten gaat over concrete handelingen tezamen met ervaringen die daar een gevolg van zijn. Door dingen te doen ontstaat inzicht en structuur.
Bij het gebruik van iconen zijn er geen concrete handelingen meer nodig. De voorstelling van de werkelijkheid, niet de werkelijkheid zelf, is voldoende. Denk bijvoorbeeld aan het print-icoon op je computerscherm: het icoontje herinnert aan een printer. Het gebruik van iconen leidt tot herkenning, vergelijking en contrast. Het aansluitende denken in symbolen staat zelfs los van de werkelijkheid, die zich niet meer laat representeren en zich ontwikkelt in abstracties. Het gebruik van symbolen wordt door Bruner gezien als het belangrijkste middel om kennis te ontwikkelen.
Tall (2012; zie [5]) werkte deze ontwikkelingsgang in het denken uit naar het wiskundig denken en benadrukte activiteiten die leerlingen aanzetten tot wiskundige gedachte-experimenten. Binnen die activiteiten onderscheidde hij de fasen van *waarneming*, *bewerking* en *redenering*. Waarneming is de drijfveer die, gebaseerd op herkenning en ervaring, leidt tot de behoefte aan beschrijvingen en visualisaties die de handelingen onnodig maken. Hij karakteriseert deze waarnemingsfase, waarin enactieve (het doen) en iconische representaties worden gebruikt, als praktisch. De fase van waarneming wordt in de ogen van Tall gevolgd door een theoretische fase van bewerkingen met symbolen en het redeneren aan de hand van die symbolen.

Op grond van deze literatuur werd aan de lesontwerpen geschaafd. Besloten werd om te beginnen met iets waarvan je veronderstelt dat de leerlingen daar intuïtief mee aan de gang kunnen op basis van herkenning en herinnering.
De volgende stap is het gebruik van visualisaties (iconen), zoals een molenwiek (in de eenheidscirkel), de eenheidscirkel met raderen (cirkelbogen) en de pijl en boog. In de daaropvolgende stap komt het gebruik van getallen aan de orde zoals *x*- en *y*-coördinaten en verhoudingstabellen met radialen.
De eerste uitvoeringen – gebaseerd op de eerste twee lesontwerpen – zijn geobserveerd, direct daarna op school besproken en bijgesteld. De bijgestelde versie is op andere locaties uitgevoerd, geobserveerd, besproken en opnieuw bijgesteld. Het tandrad-idee is daarna tweemaal uitgevoerd, geobserveerd, besproken en bijgesteld. Het laatste idee (historisch perspectief) is alleen uitgevoerd. Vanwege allerlei roosterwijzigingen werd de les uiteindelijk op een tijdstip gegeven waarop niemand kon observeren (zo gaat dat!).

De uitvoering van de lesontwerpen

Het eerste lesontwerp – De eerste uitvoeringen waren eigenlijk teleurstellend (zowel met als zonder gebruik van applets). De molenwieken (bedoeld als icoon) met hoeken van 30 graden in een assenstelsel werden in opgaven verwerkt en uitgedeeld op werkbladen. Daarna werd een nieuw werkblad uitgedeeld met een eenheidscirkel met daarin een hoek van 20 graden en de waarden van de coördinaten. De opdracht was dat de leerlingen dan zelf de coördinaten van vergelijkbare hoeken in de drie andere kwadranten zouden vinden (symbolen). De lessen werden gekenmerkt door het routinematig werken met getallen – coördinaten invullen. Het wiskundig denken – het beschrijven van relaties met symmetrie – schoot erbij in. Bovendien duurde de laatste les maar een half uur, waardoor de spanning om toch alles af te krijgen extra groot was. Het had eigenlijk om het spiegelen en het draaien van de molen moeten gaan (de eigenschappen). Dat betekent dat het werken met getallen in het teken had moeten staan van het doel: de eigenschappen.

Het tweede lesontwerp – De tandrad-aanpak is een aanpak waarbij geprobeerd wordt de theorie in praktijk te brengen zonder in de val te trappen om veel te gaan werken met getallen omdat dat in ieder geval goed moet gaan. De docent deelt werkbladen uit om zo zicht te kunnen houden op wat de leerlingen doen en hoe ze denken. Zo gaat een aantal vragen over de relatie tussen het aantal tanden en hun hoogte (bewerken en redeneren); ***zie figuur 7***.
Vervolgens wordt het aantal tanden omgezet in afstanden, uitgedrukt in radialen (bewerken); zie hiervoor ***figuur 8***. Nu blijkt er iets fout te gaan! Er zijn leerlingen die, met gevoel voor getallen, de tabel op basis van veronderstelde regelmaat, gaan invullen. Er is ook een leerling die aan de buurman vraagt ‘Wat is π?’. Het antwoord luidt ‘Nou, gewoon dit’, waarna het symbool π op tafel wordt geschetst. Daarnaast beseft de observant dat de ruimte tussen de raderen de bedoelde overeenkomst met een cirkel onduidelijk maakt. Het icoon werkt dus niet goed, het duidt niet één-op-één op een functiewaarde. Bovendien is een radiaal een hoekmaat, en geen lengtemaat. In de discussie hierover komt de vraag op tafel: wat is nu eigenlijk een radiaal? De discussie loopt ongeveer zo: ‘Het is een hoekmaat, een eenheid, die beslist geen afstand meet. 2π is de verhouding tussen diameter en omtrek van een cirkel. Een sinusfunctie is echter een voorschrift, gedefinieerd op basis van getallen. De golfvorm ontstaat als grafiek van een functie, de sinusfunctie. Je zet dan getallen op de x-as en op de y-as. Wiskunde is nu juist abstract, je hoeft lang niet altijd de eenheden te vermelden, alleen als dat er in toepassingsgerichte situaties toe doet.’
Toch raar, als leerlingen met de GR werken, moeten ze die eerst op radialen zetten. Als huiswerk moeten de leerlingen (alweer) een tabel invullen waarin het gaat om tanden, afstanden en hoogtes. Al met al is er in de les te weinig interactie met leerlingen.
In de daarop volgende les worden de onjuistheden eruit gehaald en wordt meteen een vervolgstap gezet naar de eigenschappen (bewerken en redeneren); ***zie figuur 9*** op pag. 176.

Het is inmiddels klip en klaar dat een radiaal een hoekmaat is. Ook het idee van tussenruimte wordt gecorrigeerd (het icoon wordt aangepast).

12 ☐ We kunnen nu de tanden omrekenen in een afstand die afgelegd is. We nemen nu weer een tandrad met 36 tanden.
Vul de onderstaande tabel in:

tanden	0	3	9	18	...	36	60
afstand	0	...	$\frac{1}{2}\pi$	...	$1\frac{1}{4}\pi$	...	...

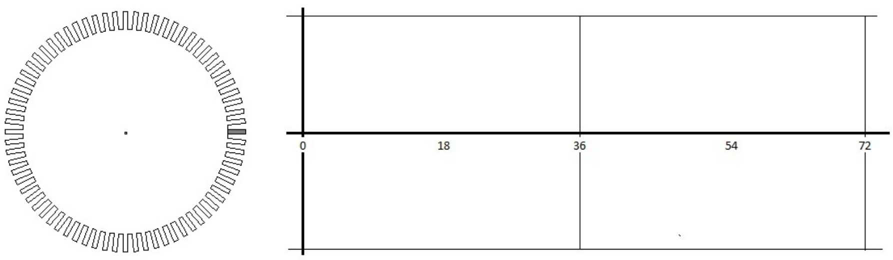
figuur 8 De omzetting van tanden in radialen

Het derde lesontwerp – Bij de uitvoering van het lesontwerp uitgaande van de historische betekenis was geen observator. Sterker nog, de les viel de dag voor de laatste plenaire bijeenkomst in juni op de UT. We moesten het dus doen met de beschrijving van de lesgever zelf. De les liep zoals hij in gedachten had (hiervoor besproken). De leerlingen konden het allemaal goed volgen en er was tijd genoeg. Nu moet er een vervolg komen, daar moet hij nog goed over nadenken. De docent belooft het voor ons op te schrijven, dan kunnen we achteraf meegenieten. De leerlingen vonden het leuk om op een alternatieve manier bezig te zijn en zelf aan het denken gezet te worden. Vooral het geschiedenisdeel viel erg in de smaak. In de discussie werd de vraag gesteld hoe je nu bij de sinusgrafiek terechtkomt. Nou ja, een tabel is een andere vorm van een grafiek, symmetrie-eigenschappen kun je ook uit een tabel halen…

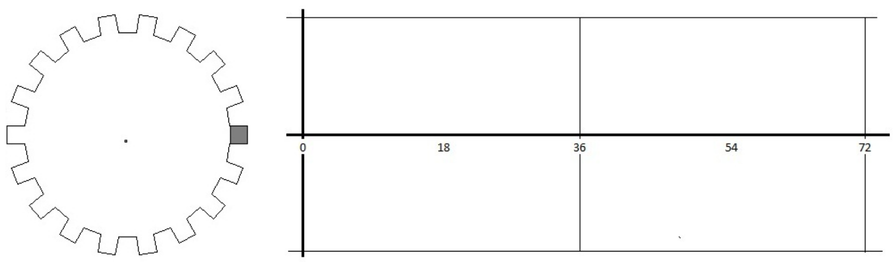
Wat is nu de winst geweest?

Er is gezocht naar een toepassing van de ontwikkeling in het wiskundig denken, gebruikmakend van iconen, als tussenstap voor het gebruik van symbolen. Het icoon ‘molenwiek’ was goed gekozen, alleen niet voldoende tot zijn recht gekomen vanwege de te snelle overgang naar het invullen van coördinaten. Het icoon ‘tandrad’ werkte minder goed, vanwege de blokkade dat er een tussenruimte is. Daarnaast kan verwarring optreden met de eenheidscirkel, die een andere functie vervult. Van een waarnemingsfase was in het eerste ontwerp geen sprake. Bij de tandrad-aanpak kwam de waarnemingsfase aan de orde door de les te beginnen met gewoon eens te kijken naar de beweging. In de laatste aanpak staat interactie met leerlingen centraal. Er is een lange fase van waarneming, die moeiteloos overgaat in visualisatie uitmondend in een icoon ‘pijl-en-boog’.

8 ☐ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 72 tanden.



9 ☐ Teken de hoogte-grafiek die hoort bij het tandrad van 18 tanden.

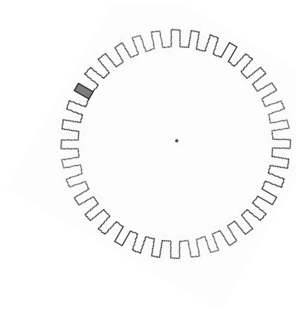


figuur 7 De relatie tussen aantal tanden en hoogte

In de vorige les hebben we gezien dat bij een rad van 36 tanden, na 3 tanden ongeveer de hoogte een $\frac{1}{2}$ bereikt wordt.
De afgelegde weg die hierbij hoort was $\frac{3}{36} \cdot 2\pi = \frac{1}{6}\pi$

5 ☐ Maar er is nog een tweede afstand waarbij de hoogte van een half bereikt wordt, bij welke afstand is dat?

6 ☐ Bij 21 tanden hoort een waarde voor de afgelegde weg van $1\frac{1}{6}\pi$ en een hoogte van ongeveer $-\frac{1}{2}$.
Bij welke waarde van de afgelegde weg is er ook sprake van een hoogte van $-\frac{1}{2}$?



figuur 9 De vervolgstap: bewerken en redeneren

Info

Deel 1 van deze artikelenreeks verscheen in *Euclides* 87(3), pp. 111-113 en deel 2 in *Euclides* 87(4), pp. 144-147.

Noten en referenties

[a] Bron: *http://mste.illinois.edu/users/pavel/java/unitcircle/*

[1] M. Alberink, H. Muijlwijk, M. Timmer (2011): *De sinus / Van meetkundige definitie naar analytisch begrip*. In: *Euclides* 86(6); pp. 250-252.

[2] J.S. Bruner (1966): *Towards a Theory of Instruction*. New York: Norton.

[3] A. Heck (2012): *Perspectives on an Integrated Computer Learning Environment*. Proefschrift. Amsterdam: Universiteit van Amsterdam.

[4] N. Orhun (2012): *The gap between real numbers and trigonometric relations*. In: *Quaderni di Ricerca in Didattica*, n. 20. Palermo (Italië): G.R.I.M., University of Palermo.

[5] D.O. Tall (2012): *Making Sense of Mathematical Reasoning and Proof*. Plenary to be presented at Mathematics & Mathematics Education: Searching for Common Ground. A Symposium in Honor of Ted Eisenberg, April 29-May 3, 2012. Beër Sjeva (Israël): Ben-Gurion University of the Negev.

Over de auteurs

Nellie Verhoef is onderzoeker en vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente.
E-mailadres: *n.c.verhoef@utwente.nl*
Mark Timmer is promovendus in de theoretische informatica aan de Universiteit Twente en docent wiskunde aan het Carmel College Salland te Raalte.
E-mailadres: *m.timmer@alumnus.utwente.nl*