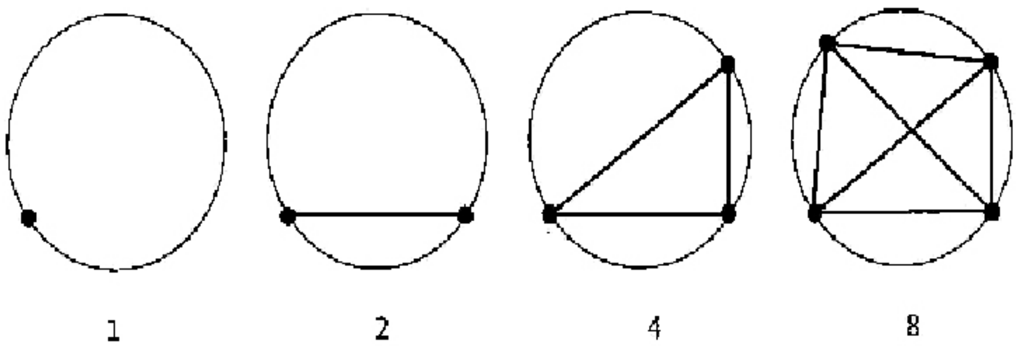
Lesson Study: denkactiviteiten in de context van bewijzen in de meetkunde

Door Nellie Verhoef

Nellie Verhoef gaf in het vorige nummer een overzicht van de Lesson study methode. In dit deel gaat ze in op haar ervaringen met Lesson Study in de praktijk.

De docenten, deelnemers aan de Community of Learners (CoL) in Twente, besluiten eensgezind zich in het voorjaar 2011 te concentreren op het onderwerp bewijzen en redeneren in 4vwo, als voorloper op het onderwerp bewijzen in 5vwo. Aansluitend op Henk Rozenhart (Euclides, 11(6), p.276) geven de docenten aan dat dit onderwerp met meer overtuiging is aan te zwengelen als je een getallenvoorbeeld gebruikt. Bijvoorbeeld 'Als n een natuurlijk getal is, dan is $n^2 - n + 41$ altijd een priemgetal' of 'Kwadraten van natuurlijke getallen eindigen nooit op een 2'. Soms lijkt een probleem meetkundig, terwijl het dan achteraf de oplossingsstrategie weer algebraïsch is zoals bijvoorbeeld (Figuur 1):

> Neem een cirkel, plaats twee punten ergens op de cirkel en verbind de punten, waardoor je de cirkel in tweeën deelt (figuur 41). Voeg nu een derde punt toe en teken lijnen die dit punt met de twee reeds bestaande punten verbindt; de cirkel is nu verdeeld in vieren. Voeg nog een vierde punt en de verbindingslijnen toe en je komt op acht vlakken uit. Een vijfde punt en nog meer verbindingslijnen leveren zestien vlakken op. Maar als je nu een zesde punt en de bijbehorende lijnen toevoegt, krijg je zeer onverwacht slechts 31 vlakken.



Figuur 1: Verdeling van cirkels

De formule om het aantal vlakken bij n punten te berekenen lijkt op het eerste gezicht gewoonweg 2^{n-1}, nadere analyse leert echter dat dat niet klopt. Het juiste verband wordt gegeven door de formule $1/24(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$. Leerlingen zijn, volgens de docenten, gemakkelijk te motiveren om op zoek te gaan naar een bewijs. Maar hoe in de meetkunde? De meetkundevoorbeelden die in het boek staan geven leerlingen niet de indruk dat een bewijs nu zo noodzakelijk en nuttig is. Toch willen de docenten in de CoL de uitdaging aangaan om een meetkundevoorbeeld – een denkactiviteit - te gebruiken in 4vwo, als introductie op de meetkunde in 5 vwo, om leerlingen ervan te overtuigen dat een bewijs nodig is. Bij de uitvoering van de les zijn er zoveel mogelijk observanten om te registreren wat leerlingen nu precies doen en niet-doen. Dit is een kernelement van de Lesson Study.

Literatuuronderzoek

Elk van de docenten leest vooraf een artikel over onderzoek, en presenteert dat op de eerstvolgende bijeenkomst op de universiteit Dat kost tijd en vergt energie, maar dat kan ook omdat alle docenten 0,1 fte voor het participeren in de CoL krijgen (Figuur 2).

Figuur 2: Samenwerken in een CoL

In één van de artikelen 'The role of contradiction and uncertainity in promoting the need to prove in dynamic geometry environments' (Hadas, Hershkowitz, & Schwarz, 2000) gaat het om de rol van tegenspraak en onzekerheid als stimulans om te gaan bewijzen, gebruikmakend van ICT. Verrassing kan stimulerend zijn. Kenmerkend voor bewijzen wordt genoemd: deductief redeneren, algemeenheden laten zien en systematiseren als intellectuele uitdaging. De docenten komen op het idee om verwarring te zaaien, dat misschien tot de noodzaak van bewijzen zou kunnen leiden. In een ander artikel 'Proofs through exploration in dynamic geometry environments' (Mousoulides, Pitalis, & Pitta, 2004) wordt het zelf ontdekken, exploreren, communiceren en verifiëren m.b.v. ICT sterk benadrukt. Concreet wordt aanbevolen 'open ended' vragen te gebruiken. In het artikel wordt gewaarschuwd voor teveel ICT-gebruik, dat heeft een negatief effect: waarom zou je nog twijfelen? Je hoeft er zelf niets meer voor te doen – de tekeningen ontstaan veel te gemakkelijk. Op basis van het literatuuronderzoek wordt besloten dat de ene deelgroep zich concentreert op een activerende werkvorm met open vragen (een opdracht die bijna aan het einde van het hoofdstuk staat), terwijl de andere deelgroep zich toespitst op de deductieve, stapsgewijze aanpak.

Lesontwerpen en materiaal

Vanwege de grootte van de groep wordt besloten twee lessen te ontwerpen, die beide op drie verschillende scholen drie maal zullen worden uitgevoerd, waarvan twee maal bijgesteld.

Lesontwerp 1

De docenten willen leerlingen activeren en kiezen voor een inductieve aanpak. Ze maken een werkblad dat uit vier bladen bestaat (Figuur 3).

Eerste blad.
Welke begrippen/methoden/kennisfeiten komen bij je op als je denkt aan wat je de afgelopen jaren op school op het gebied van meetkunde hebt geleerd? Noteer deze hieronder.

Tweede blad.
Bereken de oppervlakte van de onderstaande driehoeken.

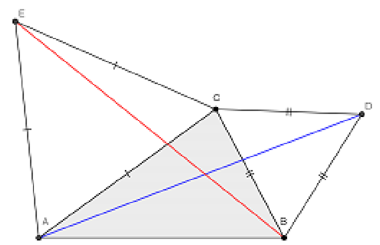
Derde blad.
Wellicht dat je bij de voorgaande opdracht van de formule $Opp. = \frac{bxh}{2}$ gebruik hebt gemaakt.
Kun je aantonen dat deze formule ook geldt voor de onderstaande (een willekeurige) driehoek? Doe dat!

Vierde blad.
Handout Meetkunde en Bewijzen – na revisie zonder stappenplan

Figuur 3: Werkbladen groep 1

De handout - opgave 41 uit G&T vwoB, tiende editie (p.151) - ziet er zo uit (Figuur 4):

Handout Meetkunde en Bewijzen



Te bewijzen: AD = BE (lengte van het rode lijnstuk = lengte van het blauwe lijnstuk)

Stappenplan:

1. Zoek welke paren driehoeken in aanmerking komen als congruente driehoeken. Vul onderstaande table in.

Δ met rood lijnstuk	Δ met blauw lijnstuk	Kenmerken / gelijkenis:
BCE	ABD	
BCE	ADC	
ABE	ABD	
ABE	ADC	

2. Welke driehoeken kies je, welke congruentie gebruik je, en….
Wat moet je nu nog aantonen?

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

3. Geef het bewijs.

……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………

Figuur 4: Handout bij de opgave

Lesontwerp 2

Het uitgangspunt is nu een puur deductieve aanpak, op grond van de postulaten van Euclides. De congruentiegevallen komen immers voort uit de postulaten. De docenten kiezen voor een plenaire start en daarna leerlingen zoveel mogelijk in groepen laten werken. De eerste vraag luidt: 'Waar denk je aan bij het vak meetkunde?'. De docent gaat vervolgens in op de benodigde tools, zoals definities, axioma's en stellingen, en eindigt met de vijf postulaten van Euclides. De laatste krijgt extra nadruk. De les vervolgt met de zes elementen van een driehoek (drie zijden Z en drie hoeken H) en mondt uit in het noemen van het begrip congruentie. Er volgen drie opgaven die uitlokken tot een bewijs (Figuur 5).

1. Construeer een driehoek ABC met drie zijden van 5 cm (ZZZ)
   Als het goed is heeft iedereen eenzelfde driehoek getekend.

2. Construeer een driehoek ABC met AB = 5 cm , $\angle A = 60^0$ en AC = 3 cm (ZHZ)
   Zijn alle getekende driehoeken nu weer gelijk?
   Waarom heet dit geval ZHZ en niet bijvoorbeeld ZZH?

3. Construeer een driehoek met $\angle A = 50^0$, $\angle B = 40^0$ en $\angle C = 90^0$ (HHH)
   Zijn alle getekende driehoeken nu weer gelijk?

Voorlopige conclusie:

Bij 1. ZZZ levert congruente driehoeken
Bij 2. ZHZ levert ook congruente driehoeken
Bij 3. HHH levert geen congruente driehoeken

De vraag is nu welk drietal levert wel congruente driehoeken en welke niet?

Figuur 5: Opgaven om een bewijs uit te lokken

De les eindigt met de vraag om een driehoek ABC te construeren met hoek A van 40^0, AC = 5 cm en BC = 4 cm (ZZH).

Observatie

De observanten zijn behalve Collers, ook collega's van dezelfde school en in een enkel geval een directielid (dat is helemaal mooi!). Ik zie en hoor, eind mei – midden in de examentijd – wat 4vwo-leerlingen tegen elkaar zeggen:

Observatie(s) van les 1

Op de eerste vraag "Welke begrippen/methode/kennisfeiten komen bij je op als je denkt aan wat je de afgelopen jaren op school hebt geleerd op het gebied van meetkunde?" komen verrassende antwoorden: Pythagoras, sinus- en cosinusregel, a-b-c-formule,… . Geen van de leerlingen heeft het over figuren, gelijkvormigheid of congruentie. Eén leerling hoor ik zeggen: het gaat om méétkunde? Maar helaas, niemand luistert.

Bij de tweede vraag naar de oppervlakte van een rechthoekige driehoek die op ruitjespapier is getekend, gaan leerlingen hokjes tellen en komen snel op het goede antwoord. Maar bij de volgende vraag naar de oppervlakte van een stomphoekige driehoek - met dezelfde hoogte als de vorige - tellen ze geen hokjes, maar proberen de driehoek te verdelen in kleinere driehoeken en dan op te vullen tot een rechthoek. Het lukt niet zo best, want de overgebleven stukken worden steeds kleiner en liggen steeds schever. Maar 'mijn groepje' geeft niet op. Ze gaan stug door en trekken zich helemaal niks aan van wat er op het bord gebeurt. Ze zien het niet eens.

De laatste vraag is uitdagend. In 'mijn groepje' wordt echter direct afgesproken het stappenplan niet te gebruiken – gewoon eerst zelf maar eens proberen. Ze komen er niet uit .. luisteren niet naar het antwoord van de docent dat op het bord verschijnt. Ze vragen of de opdracht wat later (morgen) ingeleverd kan worden. Dat kan! Sterker nog – er is een prijs te verdienen voor degene die een alternatieve oplossing aandraagt. En ja, daar gaan ze voor. De leerlingen verlaten discussiërend over een mogelijke oplossingsstrategie de les. 'Mijn groep' is ècht van plan de prijs te winnen!

Observatie(s) van les 2

Het is opvallend dat de leerlingen bij het oplossen van de problemen geen analysefiguren (schetsen) maken. Ze gaan rekenen en àls ze tekenen (veelal met pen) dan is de tekening een weerslag van de gedachte. Er wordt geen passer gebruikt, er wordt met de geo-driehoek geschoven (Figuur 6).

Figuur 6: Schuiven met de geo-driehoek

Soms wordt er gevraagd 'of dat wel nauwkeurig is'. Maar dat valt in het niet… de argumenten die tellen zijn berekeningen, geen tekeningen. Leerlingen gaan individueel aan het werk, logisch als er geen behoefte aan samenwerken is (ook niet gewend).
Bij de eerste opgave is er in 'mijn groepje' een meisje dat meteen op het idee van de hoogtelijn komt, dat overtuigt de anderen. Mooi klaar. Andere groepjes vragen zich af hoe groot de hoeken zijn, maar ook dat komt goed. Ook opgave twee gaat goed, de leerlingen overtuigen elkaar met berekeningen die worden geïllustreerd door tekeningen. De laatste opgave is toch wel moeilijk. In 'mijn groepje' vragen de leerlingen zich allereerst af hoeveel mogelijkheden er zijn. Er wordt negen geroepen! Of toch niet? Daar was een formule voor, die ze vorig jaar gehad hebben. En jawel: het had te maken met drie uit een groep van twee, of twee uit een groep van drie. Acht – drie boven twee toch?? Ja, ze zijn overtuigd: acht! Welke dan? Er wordt keurig een rij gemaakt. Zo gaat de tijd voorbij zonder aan de eigenlijke opdracht toe te komen. In een andere groep wordt zelfs zo fanatiek getekend dat het tafelblad er aan te pas komt. Het wordt snel met spuug weggepoetst (zo zie je maar, niks kwaads in de zin). Een ander groepje komt helemaal nergens – ze raken gedemotiveerd. Ze hebben niets aan elkaar….
Het is opvallend dat leerlingen helemaal vergeten dat observanten er dicht naast zitten. Voor de observanten blijft het moeilijk om niet in te grijpen, even helpen, even …

Evaluatie

De docenten blijven een uur extra om te reflecteren. We zijn het allemaal roerend eens: nooit geweten dat leerlingen doen wat ze doen! Het geeft een kick, nu kun je beter op hen inspelen!

Evaluatie(s) van les 1

Algemeen was de motivatie uitstekend. De uitleg in de eerste les was te lang – het stappenplan kan weg. Dat weglaten beviel prima in de tweede les. Opvallend was dat leerlingen bij meetkunde de abc-formule noemen, en Pythagoras – ze komen niet op het idee van figuren of gelijkvormigheid. Ze noemen wel F- en Z-figuren. Aan de noodzaak tot bewijzen (het doel) kwam de docent uiteindelijk niet eens toe, te weinig tijd. Eén leerling zei zelfs: 'geef mij maar gewoon een les rekenen!'. Het is niet goed om halverwege de aandacht op te eisen – leerlingen willen zelf uitzoeken hoe het zit. Leerlingen kwamen zelf met de vraag 'en hoe moeten we dat dan opschrijven?'. Ze kwamen met de term *congrueren*. De docent heeft na DE les nog drie andere lessen over hetzelfde onderwerp gegeven, zonder huiswerk (één vraag per les). Hij heeft er een goed gevoel over: leerlingen zagen zelf in dat de oppervlakte van een parallelogram niet verandert als de basis gelijk blijft.

Evaluatie(s) van les 2

De leerlingen waren zeer gemotiveerd – de sfeer was prima. Euclides is nu niet een naam waar ze van opschrikken. De uitspraak: 'een punt is een hoek waar de benen afgehaald zijn' is verrassend. Het aanbieden van een minder gestructureerde opgave was een goede zet. Bij de congruentiegevallen kwamen leerlingen zelf op het geval ZZH. Eén leerling merkte zelfs op dat ZZR equivalent is aan ZZZ vanwege de stelling van Pythagoras. Wat betreft de noodzaak tot bewijsvoering ligt de zaak gecompliceerder. Er zijn wel veel sommen gemaakt. Een docent geeft aan dat er altijd een zekere druk is om veel sommen te maken, dan ben je weer bij! Er is wellicht te weinig bij sommige aspecten stilgestaan. De laatste vijf minuten zijn eigenlijk altijd al niet-productief, om rust te creëren. Het socializen is nu eenmaal een belangrijk aspect in het onderwijs. Een andere docent is destijds afgeknapt op het systematisch uitknobbelen van zes mogelijkheden. Aan het doel: motiveren om een bewijs te leveren is niemand eigenlijk toegekomen. Volgende keer wordt verondersteld dat de motivatie toeneemt bij het oplossen van de opgaven uit G&T, opgeleukt met een Geogebra-applet. Maar: stuur je leerlingen nu naar het statische bewijs gebruikmakend van ZZH of naar het dynamische bewijs gebruikmakend van een transformatie?

Sommige leerlingen vragen: waarom ZZH en niet HZZ – tja, je kunt geen hoek tekenen zonder een zijde te gebruiken. Eén docent observeerde alleen het punten slijpen en het niet-construeren van de bedoelde gelijkzijdige driehoek. Kennelijk vonden de leerlingen er niets aan. Van niet-succesverhalen leer je ook. De opgaven moeten dus anders, of de werkvorm... Leerlingen leren van elkaar, van de onderlinge discussies. Een essentieel aandachtspunt blijft ook het ophalen van voorkennis.

Conclusie

Wat gaat er nu veranderen in de lessen die nog gegeven gaan worden? Het moet open! Laat leerlingen meer zelf uitzoeken en daag ze uit. Dat kost tijd, maar je wint er ook veel mee zoals motivatie.

Observeren is ook een vak, de een vindt alles opschrijven teveel, een ander observeert gedrag en inhoud en vindt interveniëren geen punt, juist omdat hij alles wil weten. Weer een ander observeert subjectief, maar heeft er dan ook veel aan (gewoon wat je opvalt noteer je). Toch moet er een heldere afspraak komen over de manier van observeren. Het doel: uitdagen tot bewijsvoering in de meetkunde is niet voldoende tot zijn recht gekomen. Het blijkt weer dat het ontwerpen en het implementeren daarvan op allerlei onverwachte hindernissen stuit. Wel is naar voren gekomen dat leerlingen gemotiveerd aan het werk gezet kunnen worden met uitdagende opdrachten – denkactiviteiten.

Over de auteur

Nellie Verhoef is onderzoeker en vakdidacticus wiskunde aan de Universiteit Twente.
e-mailadres: n.c.verhoef@utwente.nl

Referenties:

Hadas, N., Hershkowitz, R.,& Schwarz, B.B. (2000). The role of contradiction and uncertainity in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 127-150.

Mousoulides, C., Pitalis, N., & Pitta, M. (2004). Proofs through exploration in dynamic geometry environments. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics,* Vol 2 (pp. 215–222).