Einschließung von Eigenelementen

W. WETTERLING

Vorgelegt von L. COLLATZ

1. Einleitung

Eine quadratische Matrix von positiven reellen Zahlen hat nach Perron und Frobenius einen dominanten einfachen positiven Eigenwert und zugehörigen Eigenvektor mit positiven Komponenten.

Zur Berechnung von Schranken für diesen Eigenwert kann man den Quotienteneinschließungssatz von COLLATZ [2] verwenden. Diese Ergebnisse sind auf gewisse monotone Operatoren in halbgeordneten Banachräumen verallgemeinert worden, unter anderen von KREIN und RUTMAN [4] und von BOHL [1]. Hier soll gezeigt werden, wie man im Rahmen dieser allgemeinen Theorie auch eine Einschließung des Eigenelements zum dominanten Eigenwert erhalten kann. Dabei wird eine zusätzliche Bedingung P_γ gebraucht, deren Nachweis in konkreten Beispielen leicht gelingt. Diese Bedingung P_γ läßt sich als Kontraktionsbedingung für einen Operator T deuten. Da mit einer über die Ordnungsrelation definierten Norm gearbeitet wird, ist die Kugel, die man nach dem Kontraktionsprinzip als Einschließungsmenge erhält, hier ein Intervall zwischen zwei Elementen des Raumes, und die Einschließung ist von ähnlichem Typ wie bei inhomogenen Problemen mit invers-positivem linearem Operator (vgl. SCHRÖDER [5]).

2. Bezeichnungen und Problemstellung

Die Bezeichnungen sind ähnlich wie bei KRASNOSELSKIJ [3] und SCHRÖDER [5] gewählt. R sei ein halbgeordneter reeller linearer Raum. Für die Elemente von R werden kleine lateinische Buchstaben x, z, v, ... verwendet; kleine griechische Buchstaben α, γ, ... sind stets reelle Zahlen. Die Ordnungsrelation von R sei durch den Kegel K der Elemente $x \geqq 0$ gegeben, dabei ist K eine Teilmenge von R mit $K+K \subset K$, $\alpha K \subset K$ (falls $\alpha > 0$) und $K \cap (-K) = \{0\}$, und $x \leqq y$ bedeutet $y - x \in K$.

Ein Element $z \in K$ heißt Ordnungseinheit, wenn es zu jedem $x \in R$ ein $\beta > 0$ mit $x \leqq \beta z$ gibt. Wir schreiben $\mathring{K}$ für die Menge der Ordnungseinheiten und nehmen $\mathring{K} \neq \emptyset$ an. Jedes $z \in \mathring{K}$ erzeugt eine Seminorm $|x| = |x|_z = \inf\{\alpha;\ \pm x \leqq \alpha z\}$ auf R. Wir setzen voraus, daß die Ordnung archimedisch ist: Falls x, $y \in R$ sind und es eine natürliche Zahl N gibt, womit $nx + y \geqq 0$ ist für $n \geqq N$, dann soll stets $x \geqq 0$ sein. Mit dieser Voraussetzung kann man $|x| = \min\{\alpha;\ \pm x \leqq \alpha z\}$ schreiben und nachweisen, daß $|\cdot|$ eine Norm ist. Ferner sind alle Normen $|\cdot|_z$ mit $z \in \mathring{K}$ äquivalent. Alle diese Annahmen sind in den bei numerischen Anwendungen auftretenden Räumen erfüllt, wie z.B. im n-dimensionalen Raum E^n oder im Raum $C[a, b]$ der in einem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen mit der natürlichen Ordnungsrelation ($\leqq$ bedeutet $\leqq$ in allen Komponenten bzw. Punkten).

Für die Differenzmenge $K \sim \{0\}$ schreiben wir K' und nennen einen linearen Operator A: $R \to R$ streng monoton, wenn $A(K') \subset \overset{\circ}{K}$ gilt. In [1], [3], [4] werden auch Operatoren mit der Eigenschaft $A(K) \subset K$, $A^n(K') \subset \overset{\circ}{K}$ für ein $n \geqq 1$ betrachtet; wir beschränken uns hier auf den Fall $n=1$, um das anzugebende Einschließungsprinzip mit möglichst geringem Aufwand herleiten zu können.

Ferner setzen wir im folgenden stets voraus, daß der streng monotone Operator A einen Eigenwert $\lambda > 0$ mit Eigenelement $y \in \overset{\circ}{K}$ hat, das zu $|y|=1$ normiert ist und hiermit das einzige Eigenelement in K ist. Außerdem soll für jede Folge von Elementen x_k, die durch $x_{k+1} = A x_k / |A x_k|$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ mit einem Anfangselement $x_0 \in K'$ erzeugt wird, $\lim x_k = y$ gelten. Hinreichende Bedingungen für diese Eigenschaft sind, daß R mit der Norm $|\cdot|$ ein Banachraum und A vollstetig ist. Auch dies ist in den Anwendungsbeispielen stets erfüllt.

Die Einheitssphäre $\{x, |x|=1\}$ von R nennen wir S. Dann ist $y \in S \cap \overset{\circ}{K}$, und der durch $Tx = Ax/|Ax|$ gegebene nichtlineare Operator T bildet $S \cap \overset{\circ}{K}$ in sich ab. Wir versuchen nun, Teilmengen von $S \cap \overset{\circ}{K}$ zu finden, die ebenfalls durch T in sich abgebildet werden, und zwar den Durchschnitt von $S \cap \overset{\circ}{K}$ mit Intervallen $\{x, (1-\eta) z \leqq x \leqq z\}$ bzw. $\{x, (1-\eta) Az \leqq x \leqq Az\}$, wobei $z \in \overset{\circ}{K}$ ist und mit der Norm $|\cdot|_z$ bzw. $|\cdot|_{Az}$ gearbeitet wird. Unsere Voraussetzungen besagen dann, daß ein solches Intervall das Eigenelement y enthält. Bei der numerischen Anwendung des Einschließungsprinzips wird z als Linearkombination gegebener Elemente $z_1, \ldots, z_N \in R$ so bestimmt, daß η möglichst klein wird.

3. Einschließungssätze

Definition. Der streng monotone Operator A hat die Eigenschaft P_γ mit einer reellen Zahl $\gamma > 0$, wenn mit der gegebenen Ordnungseinheit z aus

$$x_1 + x_2 = z, \; x_1 \geqq 0, \; x_2 \geqq 0$$

stets folgt, daß es Zahlen $\gamma_1 \geqq 0$, $\gamma_2 \geqq 0$ gibt mit

$$A x_1 \geqq \gamma_1 A z, \; A x_2 \geqq \gamma_2 A z, \; \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma .$$

Bemerkung. Mit $0 \leqq \delta \leqq 1$ und $x_1 = \delta z$, $x_2 = (1-\delta) z$ wird $A x_1 = \delta A z$, $A x_2 = (1-\delta) A z$, $\delta + (1-\delta) = 1$. Daher ist die Zahl γ in P_γ stets $\leqq 1$.

Satz 1. *Der streng monotone lineare Operator A habe die Eigenschaft P_γ mit einem $\gamma > 0$. Wenn dann $Az/|Az|_z \geqq (1-\varepsilon) z$ mit einem $\varepsilon < \gamma$ ist, gilt für das Eigenelement $y \in \overset{\circ}{K}$ von A die Einschließung*

$$(1 - \varepsilon/\gamma) z \leqq y \leqq z .$$

Beweis. Es ist zu zeigen, daß der durch $Tx = Ax/|Ax|_z$ gegebene Operator T das Intervall $I = \{x; (1-\varepsilon/\gamma) z \leqq x \leqq z\}$ in sich abbildet. $Tx \leqq z$ gilt gemäß Definition der Norm. Mit $x \in I$ wird $x_1 = z - x \geqq 0$, $x_2 = x - (1-\varepsilon/\gamma) z \geqq 0$ und $x_1 + x_2 = (\varepsilon/\gamma) z$, also $Ax_1 \geqq (\varepsilon\gamma_1/\gamma)Az$ und $Ax_2 \geqq (\varepsilon\gamma_2/\gamma)Az$ mit $\gamma_1 \geqq 0$, $\gamma_2 \geqq 0$, $\gamma_1+\gamma_2=\gamma$. Dann ist

$$(1-\varepsilon)\left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}+\frac{\varepsilon\gamma_2}{\gamma}\right)|Az|_z z \leqq \left(1-\frac{\varepsilon}{\gamma}+\frac{\varepsilon\gamma_2}{\gamma}\right)Az \leqq Ax$$

$$\leqq \left(1-\frac{\varepsilon\gamma_1}{\gamma}\right)Az \leqq \left(1-\frac{\varepsilon\gamma_1}{\gamma}\right)|Az|_z z;$$

hieraus folgt $|Ax|_z \leqq (1-\varepsilon\gamma_1/\gamma)\,|Az|_z = (1-\varepsilon+\varepsilon\gamma_2/\gamma)\,|Az|_z$ und damit

$$\frac{Ax}{|Ax|_z} \geqq (1-\varepsilon)\frac{1-\dfrac{\varepsilon}{\gamma}+\dfrac{\varepsilon\gamma_2}{\gamma}}{1-\varepsilon+\dfrac{\varepsilon\gamma_2}{\gamma}}\,z\,.$$

Der Quotient auf der rechten Seite dieser Ungleichung ist wegen $\varepsilon<\gamma\leqq 1$ am kleinsten für $\gamma_2=0$, daher ist $Ax/|Ax|_z \geqq (1-\varepsilon/\gamma)z$.

Bemerkung. Unter den Voraussetzungen des Satzes ist $(1-\varepsilon)\,|Az|_z \leqq \lambda \leqq |Az|_z$ eine Einschließung für den dominanten Eigenwert λ.

Die Einschließung gemäß Satz 1 entspricht der Abschätzung des Fixpunktsatzes für kontrahierende Operatoren in einem vollständigen metrischen Raum mit Metrik $d(\cdot,\cdot)$, wo T ein Operator mit Kontraktionskonstante $\omega<1$, ferner x_0, $x_1=Tx_0, \ldots, x_k=Tx_{k-1}, \ldots$ eine gegen das Fixelement y konvergierende Folge und

$$d(y,x_0) \leqq \frac{1}{1-\omega}\,d(x_1,x_0)$$

ist. z entspricht hier x_0 und $1-\gamma$ der Kontraktionskonstante ω. Anscheinend gelingt es nicht, aus der Eigenschaft P_γ die Kontraktionseigenschaft des obigen Operators T im Sinne der Norm $|\cdot|_z$ abzuleiten und Satz 1 dann als Folgerung des Kontraktionssatzes zu erhalten.

Beim Kontraktionssatz hat man jedoch noch die schärfere Abschätzung

$$d(y,x_1) \leqq \frac{\omega}{1-\omega}\,d(x_1,x_0)\,.$$

Es folgt ein Einschließungssatz für Eigenelemente, der dieser Abschätzung entspricht.

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt für das Eigenelement y, wenn es zu $|y|_{Az}=1$ normiert ist, die Einschließung*

$$(1-\eta)Az \leqq y \leqq Az \quad \textit{mit} \quad \eta=\frac{\varepsilon}{\gamma}\,\frac{1-\gamma}{1-\varepsilon}\,.$$

Beweis. Wir zeigen, daß der durch $T_1x=Ax/|Ax|_{Az}$ gegebene Operator T_1 das Intervall $I'=\{x;\,(1-\eta)Az \leqq x \leqq Az\}$ in sich abbildet. Mit $x_1=|Az|_z z-x \geqq 0$ und $x_2=x-(1-\varepsilon)(1-\eta)\,|Az|_z z \geqq 0$ leitet man wie im obigen Beweis aus P_γ

die Ungleichung

$$\frac{Ax}{|Ax|_{Az}} \geqq \frac{1-(1-\gamma_2)(\varepsilon+\eta-\varepsilon\eta)}{1-(\gamma-\gamma_2)(\varepsilon+\eta-\varepsilon\eta)} Az$$

her und sieht, daß der Quotient auf der rechten Seite wiederum minimal für $\gamma_2=0$ und daher $\geqq 1-\eta$ ist.

4. Operatoren mit Eigenschaft P_γ

Wir zeigen an Beispielen wie die Eigenschaft P_γ nachzuweisen ist und die Einschließungssätze anzuwenden sind.

1. $R=E^n$ mit der natürlichen Ordnung, $z=(z_1, \ldots, z_n)$ mit $z_i>0$ $(i=1, \ldots, n)$, $A=(a_{ik})$ mit $a_{ik}>0$ $(i, k=1, \ldots, n)$. Der Matrixoperator A hat die Eigenschaft P_γ mit

$$\gamma=\max_j \min_{i,k} \frac{a_{ik} w_j}{a_{jk} w_i},$$

wenn $Az=w=(w_1, \ldots, w_n)$ ist. Wenn man

$$\beta_{ij}=\min_k(a_{ik}/a_{jk}), \qquad \delta_j=\min_i(\beta_{ij}/w_i), \qquad x_\nu=(x_{\nu k}), \qquad Ax_\nu=v_\nu=(v_{\nu i}) \;(\nu=1,2)$$

setzt, wird nämlich

$$v_{\nu i}=\sum_k a_{ik} x_{\nu k} \geqq \beta_{ij} \sum_k a_{jk} x_{\nu k}=\beta_{ij} v_{\nu j} \geqq \delta_j w_i v_{\nu j} \qquad (\nu=1,2),$$

also

$$v_1 \geqq \gamma_1 w,\; v_2 \geqq \gamma_2 w \quad \text{mit} \quad \gamma_\nu=\delta_j v_{\nu j} \qquad (\nu=1,2)$$

und

$$\gamma_1+\gamma_2=\delta_j(v_{1j}+v_{2j})=\delta_j w_j,$$

da $x_1+x_2=z$ und somit $v_1+v_2=w$ ist. Dies gilt für alle j. Das optimale γ ist das Maximum der Zahlen $\delta_j w_j$. Im Beispiel

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad z=(2,1)$$

findet man $\gamma=5/8$ und kann Satz 1 mit $\varepsilon=3/8$ anwenden. Das ergibt die Einschließung $(0.8, 0.4) \leqq y \leqq (2, 1)$ für den Eigenvektor $y=(1, 1)$ zum Eigenwert $\lambda=3$.

Nach Satz 2 erhält man die Einschließung $(0.8, 0.64) \leqq y \leqq (1.25, 1)$.

2. $R=C[a, b]$ mit der natürlichen Ordnung, $z=z(t)>0$ in $[a, b]$.

$$Ax=\int_a^b k(t, s)\, x(s)\, ds,$$

wobei $k(t, s)>0$ und stetig ist für $a \leqq t$, $s \leqq b$. Mit $w=Az$ findet man wie im vorhergehenden Beispiel, daß A die Eigenschaft P_γ mit

$$\gamma=\max_r \min_{s,t} \frac{k(t, s)\, w(r)}{k(r, s)\, w(t)} \tag{1}$$

hat. Es scheint, als wäre die numerische Bestimmung von γ recht aufwendig. An einem Beispiel soll jedoch gezeigt werden, wie man γ ohne großen Aufwand berechnen kann. Sei

$$Ax=\int_0^1 \frac{x(s)}{1+s+t}\,ds, \qquad z(t)\equiv 1, \qquad w(t)=\ln\frac{2+t}{1+t}.$$

In (1) wählen wir $r=1$ (nicht optimal). Dann kann man die leicht zu verifizierenden Ungleichungen

$$\frac{2+s}{1+s+t}\geqq\frac{3}{2+t}\geqq\frac{3}{2\ln 2}\ln\frac{2+t}{1+t} \qquad (0\leqq t, s\leqq 1)$$

angeben und findet damit

$$v_\nu(t)=\int_0^1\frac{x_\nu(s)}{1+s+t}\,ds\geqq\frac{3}{2+t}\int_0^1\frac{x_\nu(s)}{2+s}\,ds=\frac{3}{2+t}\,v_\nu(1)\geqq\frac{3}{2\ln 2}\,w(t)\,v_\nu(1) \quad (\nu=1,2)$$

für $x_\nu(t)\geqq 0$ mit $x_1(t)+x_2(t)=z(t)$ und $v_\nu=Ax_\nu$, $v_1(1)+v_2(1)=w(1)$. Daher kann man im Einschließungssatz

$$\gamma=\frac{3}{2\ln 2}\,w(1)=\frac{3\ln 3/2}{2\ln 2}\approx 0.8775$$

verwenden.

Satz 1 ergibt mit $\varepsilon=1-\ln(3/2)/\ln 2\approx 0.4150$ die Schranken $0.5270\leqq y(t)\leqq 1$ für die Eigenfunktion $y(t)$, und mit Satz 2 erhält man die Schranken

$$0.9010\ln\frac{2+t}{1+t}\leqq y(t)\leqq\ln\frac{2+t}{1+t}.$$

Eine bessere Näherung für $y(t)$, nämlich ein Polynom $z(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, wurde durch Kollokation in drei Punkten (den Nullpunkten des Tschebyscheff-Polynoms vom Grad 3) und Lösung einer Matrix-Eigenwertaufgabe berechnet: $z(t)=1-0.64405t+0.22762t^2$. Hiermit erhält man $\varepsilon=0.01090$, $\gamma=0.86592$ (mit den obigen Ungleichungen; $r=1$ ist vermutlich hier nicht optimal) und damit nach Satz 1 die Einschließung $0.9874\,z(t)\leqq y(t)\leqq z(t)$. Satz 2 ergibt mit

$$w(t)=Az(t)=a_1-a_2(\tfrac{1}{2}+t)+[a_0-a_1(1+t)+a_2(1+t)^2]\ln\frac{2+t}{1+t}$$

die Einschließung $0.9983\,w(t)\leqq y(t)\leqq w(t)$.

3. Sei L ein gewöhnlicher linearer Differentialoperator zweiter Ordnung

$$L[x](t)=-(p(t)x')'+q(t)x$$

mit Randbedingungen $x(a)=x(b)=0$. In $[a,b]$ sei $q(t)\geqq 0$ und stetig, $p(t)>0$ und stetig differenzierbar; dann ist L von monotoner Art (auch noch unter schwächeren Voraussetzungen). Der inverse Integraloperator A mit der Greenschen Funktion als Kern ist streng monoton, wenn als R der Raum der in $[a,b]$ stetigen Funktionen $x=x(t)$ mit $x(a)=x(b)=0$ und $|x(t)|\leqq\alpha(t-a)(b-t)$ für passendes $\alpha=\alpha(x)$ gewählt wird; dabei wird die natürliche Ordnung verwendet;

$x \geqq o$ bedeutet $x(t) \geqq 0$ für $a<t<b$. Ordnungseinheiten sind etwa Funktionen $z=z(t)$ mit $z(t)>0$ für $a<t<b$ und $z'(a)>0$, $z'(b)<0$.

Man könnte nun die Eigenschaft P_γ wie oben im Fall der Integralgleichungen mit Hilfe der Greenschen Funktion herleiten. Im Interesse der Anwendbarkeit sollte man jedoch die Verwendung der Greenschen Funktion vermeiden und folgendermaßen vorgehen:

Sei z die gegebene Ordnungseinheit. $w=Az$ ist dann die Lösung von $L[w]=z$, $w(a)=w(b)=0$. Sind $x_1, x_2 \in K$, so sind ebenso $v_1=Ax_1$ und $v_2=Ax_2$ die Lösungen von $L[v_\nu]=x_\nu$, $v_\nu(a)=v_\nu(b)=0$ $(\nu=1,2)$. Wir nehmen $x_1+x_2=z$, also $v_1+v_2=w$ an und suchen ein $\gamma>0$, womit $v_1 \geqq \gamma_1 w$, $v_2 \geqq \gamma_2 w$, $\gamma_1+\gamma_2=\gamma$ ist.

Hierzu wählen wir ein $r(a<r<b)$ und bestimmen untere Schranken für die Lösungen g, h der Randwertprobleme

(*i*) $L[g]=0$ $(a<t<r)$, $g(a)=0$, $g(r)=1$;

(*ii*) $L[h]=0$ $(r<t<b)$, $h(r)=1$, $h(b)=0$.

Da L in den Teilintervallen $[a,r]$, $[r,b]$ von monotoner Art ist, existieren diese Lösungen und untere Schranken g_-, h_- können mit einem Verfahren der linearen Optimierung (vgl. etwa [6]) bestimmt werden. Damit wird

$$v_\nu(t) \geqq \begin{Bmatrix} v_\nu(r)\, g(t) \geqq v_\nu(r)\, g_-(t) & (a \leqq t \leqq r) \\ v_\nu(r)\, h(t) \geqq v_\nu(r)\, h_-(t) & (r \leqq t \leqq b) \end{Bmatrix} \quad (\nu=1,2).$$

Wenn nun $g_-(t)/w(t)$ in $[a,r]$ und $h_-(t)/w(t)$ in $[r,b]$ durch eine Konstante $\delta>0$ nach unten beschränkt sind, hat A die Eigenschaft P_γ mit $\gamma=\delta w(r)$ wegen

$$v_\nu(t) \geqq \delta\, v_\nu(r)\, w(t) \quad (\nu=1,2), \qquad v_1(r)+v_2(r)=w(r).$$

Bei der Aufgabe $L[x]=-x''$, $x(0)=x(1)=0$ kann man mit $r=0.5$ g und h explizit angeben. Für $z=t(1-t)$ findet man dann $\gamma=5/8=0.625$ und für $z=\sin \pi t$ findet man $\gamma=2/\pi \approx 0.636$. Mit $z=t(1-t)$, $w=\frac{1}{12}t(1-t)\,[1+t(1-t)]$ wird $\varepsilon=1/5$. Nach Satz 1 erhält man die Einschließung

$$0.68\, t(1-t) \leqq y(t) \leqq t(1-t)$$

für die Eigenfunktion $y(t)$ $(=\frac{1}{4}\sin \pi t)$. Hier wäre $\frac{\pi}{4}t(1-t) \leqq y(t) \leqq t(1-t)$ die bestmögliche Einschließung $(\pi/4 \approx 0.785)$. Nach Satz 2 erhält man

$$0.85\, w(t) \leqq y(t) \leqq w(t).$$

Herrn H. Th. Jongen danke ich für seine Hilfe bei den numerischen Rechnungen zu § 4.2.

Literatur

1. Bohl, E., Eigenwertaufgaben bei monotonen Operatoren und Fehlerabschätzungen für Operatorgleichungen. Arch. Rational Mech. Anal. **22**, 313–332 (1966).
2. Collatz, L., Einschließungssatz für charakteristische Zahlen von Matrizen. Math. Z. **48**, 221–226 (1942).
3. Krasnoselskij, M. A., Positive Solutions of Operator Equations. Groningen: P. Noordhoff 1964.

4. KREIN, M. G., & M. A. RUTMAN, Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space. Transl. Series 1, vol. **10**, Am. Math. Soc. 1962.
5. SCHRÖDER, J., Lineare Operatoren mit positiver Inversen. Arch. Rational Mech. Anal. **8**, 408—434 (1961).
6. WETTERLING, W., Lokal optimale Schranken bei Randwertaufgaben. Computing **3**, 125—130 (1968).

Technische Hogeschool Twente
Onderafdeling der Toegepaste Wiskunde
Postbus 217
Enschede/Niederlande

(Eingegangen am 25. April 1971)